ЭЛЕКТРОСТАТИКА

Электростатика – раздел учения об электричестве, в котором изучаются взаимодействия и свойства систем электрических зарядов, неподвижных относительно выбранной инерциальной системы отсчета.

Заряд – связанный с материальным объектом источник электромагнитного поля.

Точечный электрический заряд – заряженное тело, формы и размеры которого несущественны в данной задаче.

Элементарный заряд – $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл (электрон, позитрон, протон).

Закон сохранения заряда – алгебраическая сумма электрических зарядов тел или частиц, образующих электрически изолированную систему, не изменяется при любых процессах, происходящих в этой системе. Система называется электрически изолированной, если через ограничивающую её поверхность не могут проникать заряженные частицы. Закон сохранения заряда является одним из фундаментальных законов природы.

Закон Кулона

В основе теории электростатического поля лежит закон Кулона, который является обобщением данных опыта. Закон кулона определяет силу взаимодействия двух точечных зарядов: сила взаимодействия двух неподвижных точечных электрических зарядов прямо пропорциональна произведению величин этих зарядов, обратно пропорциональна квадрату расстояния между зарядами и направлена вдоль прямой, соединяющей их центры.

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\,\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2},$$

где $\varepsilon = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \frac{Ф}{м}$ - электрическая постоянная,

ε - диэлектрическая проницаемость среды,

$\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$ - единичный вектор, направленный вдоль прямой, соединяющей заряды

Одноименные заряды отталкиваются, разноименные заряды притягиваются.

Напряженность электростатического поля

Взаимодействие между электрически заряженными телами или частицами, движущимися произвольным образом относительно инерциальной системы отсчета, осуществляется посредством электромагнитного поля, которое представляет собой совокупность электрического и магнитного полей. Электрическое поле действует на заряд с силой, которая не зависит от скорости движения заряда. Магнитное поле действует только на движущиеся заряды с силами, пропорциональными скоростям движения зарядов и направленными перпендикулярно этим скоростям.

Если заряд неподвижен, то вокруг него существует электростатическое (стационарное) поле, посредством которого осуществляется взаимодействие между зарядами.

Для количественной характеристики электрического поля служит специальная физическая величина – напряженность электрического поля, равная отношению силы, действующей на заряд со стороны поля, к величине заряда.

Пусть поле образовано неподвижным точечным зарядом q. Будем вносить в это поле точечный пробный заряд q_1. На него, согласно закону Кулона, будет действовать сила, пропорциональная величине заряда q_1. Но отношение этой силы к величине заряда q_1 не зависит от величины пробного заряда и характеризует электрическое поле в той точке, где находится пробный заряд q_1. Эта величина и есть напряженность поля.

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{q_1}}$$

Однородным называется электрическое поле, значение вектора **E** в каждой точке которого одинаково. Напряженность поля, создаваемого точечным неподвижным электрическим зарядом:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|},$$

где $\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$ - единичный вектор, направленный вдоль прямой, соединяющей заряд с точкой, где вычисляется напряжённость поля,

ε - диэлектрическая проницаемость среды, где находится точечный электрический заряд.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

Размерность $[E] = \frac{В}{м}$

Из закона Кулона следует, что

$$\mathbf{F} = q_1 \mathbf{E} \qquad (1)$$

Если q_1 - единичный положительный пробный заряд, то

$$\mathbf{E} = \mathbf{F},$$

т.е. напряженность поля равна силе, действующей на единичный положительный заряд, помещенный в данную точку поля.

Формула (1) определяет силу, действующую на любой заряд, помещенный в электрическое поле.

Принцип суперпозиции электрических полей

Пусть E_1, E_2, . . ., E_n отдельными зарядами в какой-либо точке. Тогда напряженность **E** результирующего поля в той же точке для дискретного распределения зарядов:

$$\mathbf{E} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}_k$$

Пусть заряды распределены непрерывно. Линейное распределение зарядов характеризуется линейной плотностью

$$\tau = \frac{dq}{ql} \quad \frac{Кл}{м}$$

Распределение зарядов по поверхности характеризуется поверхностной плотностью

$$\sigma = \frac{dq}{qS} \quad \frac{Кл}{м^2}$$

Распределение зарядов по объему характеризуется объемной плотностью

$$\rho = \frac{dq}{qV} \quad \frac{Кл}{м^3}$$

Принцип суперпозиции при непрерывном распределении зарядов:

$$\mathbf{E} = \int_q d\mathbf{E},$$

где $d\mathbf{E}$ - напряженность поля, создаваемого точечными зарядами dq.

Здесь $dq = \tau\, dl$ для линейного распределения зарядов;

$dq = \sigma\, dS$ для поверхностного распределения зарядов;

$dq = \rho\, dV$ для объемного распределения зарядов.

Суммарная напряженность электрического поля при прерывном распределении зарядов:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \int_q \frac{dq}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

Напряженность поля диполя

Диполем называется совокупность двух равных по абсолютной величине точечных зарядов противоположного знака, находящихся на расстоянии l друг от друга, малым по сравнению с их расстоянием до точек, в которых определяется напряженность поля (Рис.).

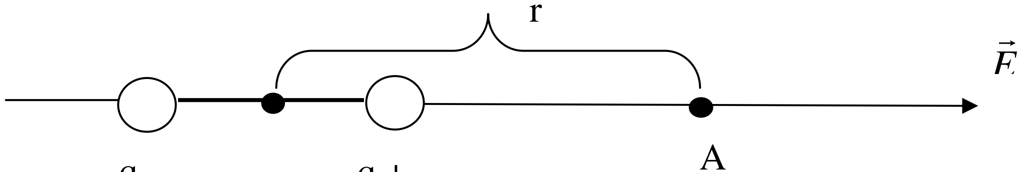


Рис.

Линия, проходящая через заряды, называется осью диполя.

$$P = ql$$

$\vec{P}$ - момент диполя. Принято считать, что вектор P направлен от отрицательного заряда (-q) к положительному (+q).

Напряженность в точке A, находящейся на оси диполя:

$$E = \frac{2p}{r^3}$$

Напряженность поля в точке B, лежащей на перпендикуляре к оси диполя, восстановленном из середины диполя:

$$E = \frac{P}{r^3}$$

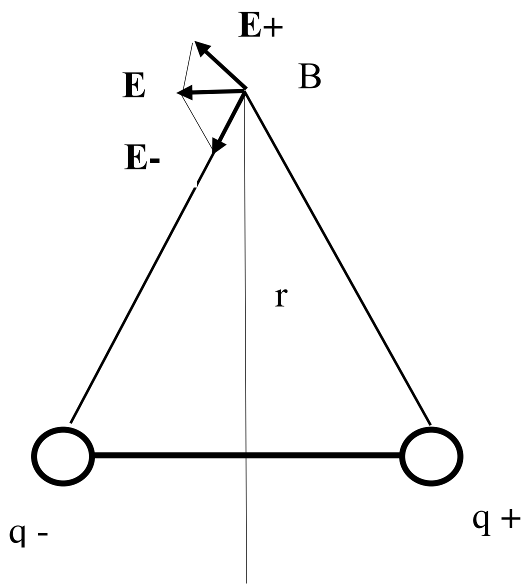
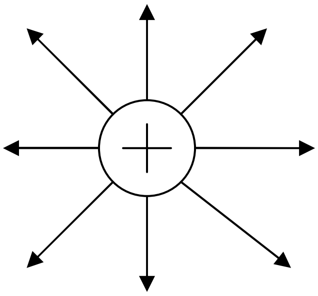
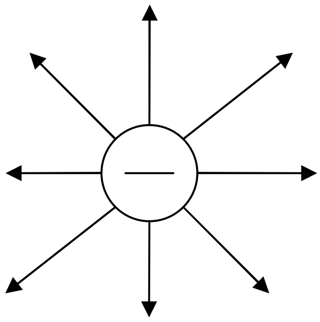


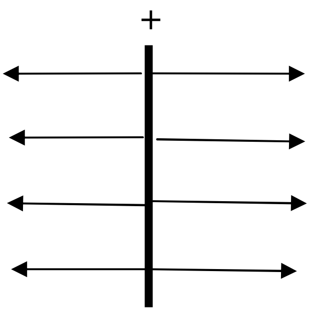
Рис.

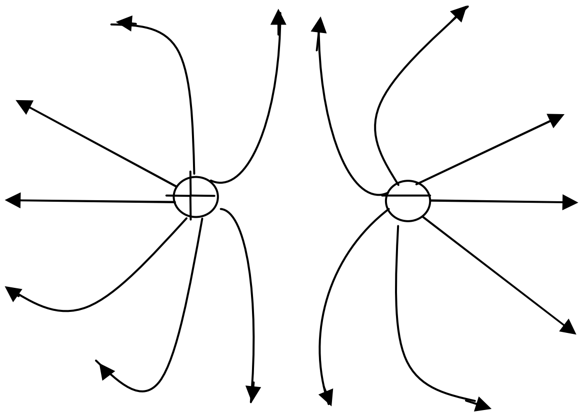
Силовые линии или линии напряженности электростатического поля

Для описания электрического поля нужно задать вектор напряженности в каждой точке поля. Силовой линией, или линией вектора напряженности электрического поля, называют линию, проведенную в электрическом поле, для которой направление касательной в любой точке совпадает с направлением вектора напряженности. Силовые линии электростатического поля не замкнуты: они начинаются на положительных зарядах и оканчиваются на отрицательных (или уходят на бесконечность). При графическом изображении поля густота силовых линий, пересекающих перпендикулярную к ним прямую в любом месте поля, изображает напряженность поля.









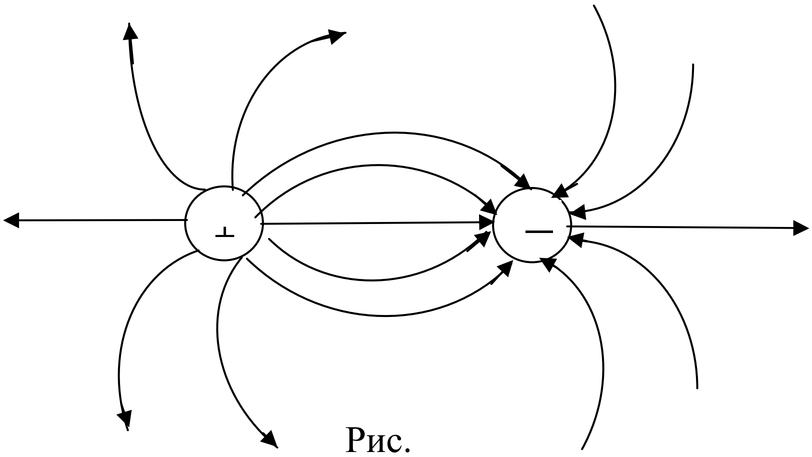


Рис.

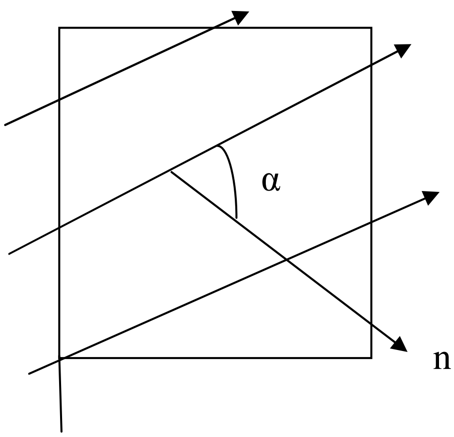
Поток вектора напряженности электростатического поля

Поток вектора электростатического поля **-** это скалярная величина, численно равная числу силовых линий, пронизывающих любую поверхность, перпендикулярную силовым линиям. В этом случае через единичную площадку, перпендикулярную вектору **E**, проводят число силовых линий, равное или кратное величине напряженности в данной точке поля.

$$dN = (\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})dS$$

dN – поток вектора **E**; **n** - единичный вектор нормали к поверхности dS.

$$dN = E\cdot\cos(\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})dS = E\cos\alpha dS$$



$$E\cdot\cos\alpha = E_n,$$

где E_n- проекция вектора напряженности на направление нормали к поверхности dS

$$dN = E_n dS$$

$$N = \int_s dN = \int_s (\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})dS = \int_s E_n dS$$

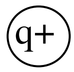
Поток вектора напряженности может быть как положительным, так и отрицательным: выходящий из поверхности поток – положительный, входящий – отрицательный. Если поле создается системой электрических зарядов q_i (i=1, 2, 3,…), то поток вектора напряженности N_i, создаваемой этой системой зарядов, равен алгебраической сумме потоков вектора напряженности, создаваемых каждым зарядом в отдельности.

$$N=\sum_{i=1}^{n} N_i$$

Знак потока определяется знаком заряда: если суммарный заряд отрицательный – поток отрицательный (входящий), если суммарный заряд положительный – поток положительный (выходящий).

Теорема Остроградского – Гаусса

Теорема Остроградского – Гаусса определяет поток вектора **E** через любую замкнутую поверхность, охватывающую заряды. Пусть источником поля является точечный заряд , находящийся в вакууме. В качестве замкнутой поверхности выберем сферу центром в точечном заряде и радиусом r. Найдем поток вектора напряженности через эту сферическую поверхность. В общем случае форма замкнутой поверхности (из соображения удобства расчетов) должна быть такой, чтобы силовые линии были перпендикулярны ко всей поверхности или к отдельным ее частям, другим пара



Т.к. точки, лежащие на поверхности сферы находятся на одинаковом расстоянии r от точечного заряда, то величина напряженности во всех точках, лежащих на этой сфере, есть const.

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$N = \oint E_n dS = E\oint dS = E 4\pi r^2$$

$$N = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q \cdot 4\pi r^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad (1)$$

Из (1) видно, что поток вектора **E** сквозь замкнутую поверхность, охватывающую точечный заряд, численно равен величине заряда, деленной на электрическую постоянную. Поток вектора через замкнутую поверхность не зависит от формы и размеров этой поверхности (из формулы (1)). Поток – величина алгебраическая. Знак потока зависит от знака заряда.

Если $q>0$, то $N>0$ – поток, выходящий из поверхности

Если $q<0$, то $N<0$ – поток, входящий в поверхность

Если поверхность не охватывает заряды, то поток через эту поверхность равен нулю.

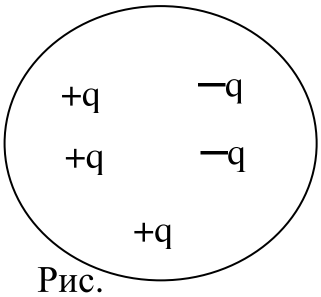


Рис.

Пусть электрическое поле образовано системой точечных зарядов. Найдем поток сквозь замкнутую поверхность, охватывающую эту систему зарядов. По принципу суперпозиции в каждой точке, лежащей на поверхности:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \ldots + \mathbf{E}_n$$

Поток через замкнутую поверхность:

$$N = \oint_s ((\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \ldots + \mathbf{E}_n)\mathbf{n})dS = \oint_s \mathbf{E}_1\mathbf{n}dS + \oint_s \mathbf{E}_2\mathbf{n}dS + \ldots + \oint_s \mathbf{E}_n\mathbf{n}dS =$$

$$= \frac{q_1}{\varepsilon_0} + \frac{q_2}{\varepsilon_0} + \ldots + \frac{q_n}{\varepsilon_0} = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i}{\varepsilon_0}$$

Теорема Остроградского-Гаусса: поток вектора напряженности через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме всех зарядов, расположенных внутри этой поверхности, деленную на ε_0.

Применение теоремы Остроградского-Гаусса для расчета напряженности поля

Теорема Остроградского-Гаусса применяется для расчета напряженности электрического поля, связываемого симметричным распределением зарядов. Рассмотрим некоторые принципы расчеты напряженности электрического поля от различных источников.

1. Проводящая равномерно заряженная по поверхности сфера с поверхностной плотностью заряда

$$\sigma = \frac{q}{S},$$

где q=$\sigma \cdot S$ - полный заряд на поверхности сферы,

S=$\pi \cdot r^2$ - площадь поверхности сферы.

R – радиус заряженной сферы.

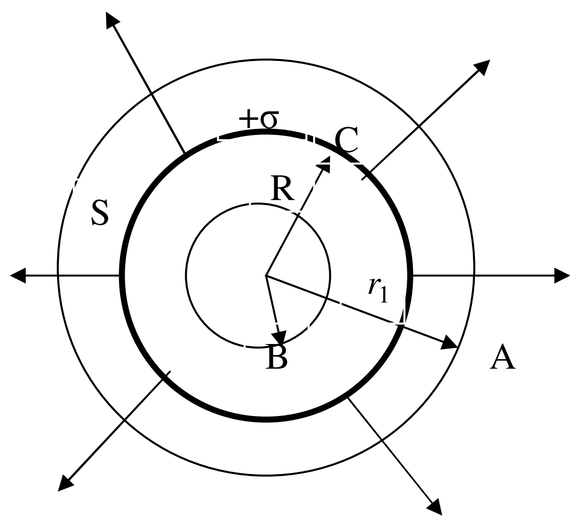


Рис.

Задачу разобьем на три части:

а) определим напряженность электростатического поля вне сферической поверхности (т. A),

б) определим напряженность поля внутри сферической поверхности (т. B),

в) определим напряженность поля на сферической поверхности (т. C).

Из условий симметрии задачи и что линии напряженности электростатического поля могут быть только радиальными прямыми в качестве замкнутой поверхности удобно выбрать сферу с центром в центре заряженной сферической поверхности.

Найдем напряженность электростатического поля в т. А. из определения потока вектора напряженности через замкнутую поверхность (сфера радиуса r_1) имеем:

$$N = \oint_S \mathbf{E}_n dS = E_A 4\pi r^2 \qquad (1)$$

По теореме Остроградского-Гаусса:

$$N = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), имеем

$$E_A \cdot 4\pi r_1^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Отсюда:

$$E_A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2_1}. \qquad (3)$$

Или, учитывая, что $q = 4\pi R^2\sigma$, имеем

$$E_A = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2_1}, \qquad (4)$$

где r_1 - расстояние от центра заряженной сферы до т. А.

Из (3) следует, что напряженность поля, создаваемого сферой, равномерно заряженной по поверхности сферой, аналогично полю точечного заряда, равному заряду сферы и сосредоточенному в центре этой сферы.

Найдем напряженность поля в т. В. Из определения потока вектора напряженности через замкнутую поверхность (сфер радиуса r_2) имеем:

$$N = \oint_S E_n dS = E_B 4\pi r_2^2$$

По теореме Остроградского – Гаусса:

$$N = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Поскольку внутри заряженной по поверхности сферы нет зарядов, то поток через сферу радиуса r_2 равен нулю. Следовательно, напряженность поля внутри заряженной сферы (т. В) $E_B = 0$.

Напряженность электростатического поля на поверхности заряженной сферы (т. С):

$$E_c = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad (5)$$

2. Бесконечная проводящая плоскость, равномерно заряженная по поверхности, с поверхностной плотностью заряда σ. Следовательно, на этой плоскости сосредоточены заряды:

$$q = \sigma \cdot S$$

Из симметрии задачи очевидно, что линии напряженности электростатического поля могут быть направлены только перпендикулярно заряженной плоскости. В этом случае в качестве замкнутой поверхности удобно выбрать цилиндр, образующие которого параллельны линиям напряженности электростатического поля, создаваемого заряженной плоскостью (Рис.).

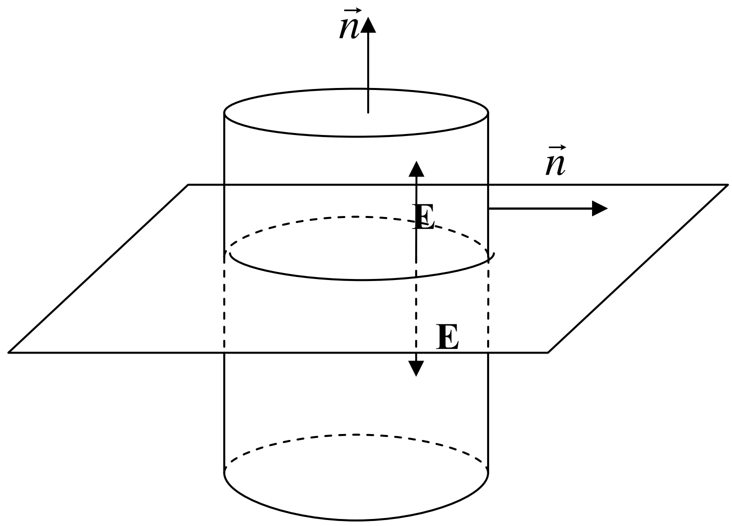


Рис.

Учитывая, что площадь поверхности цилиндра можно разбить на сумму площадей оснований и площадь боковой поверхности, из определения потока вектора напряженности электростатического поля:

$$\mathrm{N} = \oint_S \mathbf{En}dS = \int_{S_{осн}} \mathbf{En}dS + \int_{S_{осн}} \mathbf{En}dS + \int_{S_{бок}} \mathbf{En}dS. \quad (6)$$

Так как вектор нормали к боковой поверхности **n** перпендикулярен вектору **E**, то

$$\int_{S_{осн}} \mathbf{En}dS = 0.$$

Следовательно, из (6) имеем:

$$N = E \cdot 2S_{осн}. \quad (7)$$

По теореме Остроградского – Гаусса:

$$N = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma \cdot S}{\varepsilon_0}. \quad (8)$$

Сравнивая (7) и (8) получаем выражение для напряженности электростатического поля, создаваемого бесконечной плоскостью, равномерно заряженной по поверхности с поверхностной плотностью заряда σ:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \quad (9)$$

Вдали от краев равномерно заряженной плоскости напряженность поля не зависит от плоскости до данной точки поля, в которой определяем напряженность.

Рассмотрим плоский конденсатор. Плоский конденсатор представляет собой две разноименно заряженные пластины (обкладки) ($|\sigma +| = |\sigma -|$), помещенные на некотором расстоянии друг от друга (Рис.)

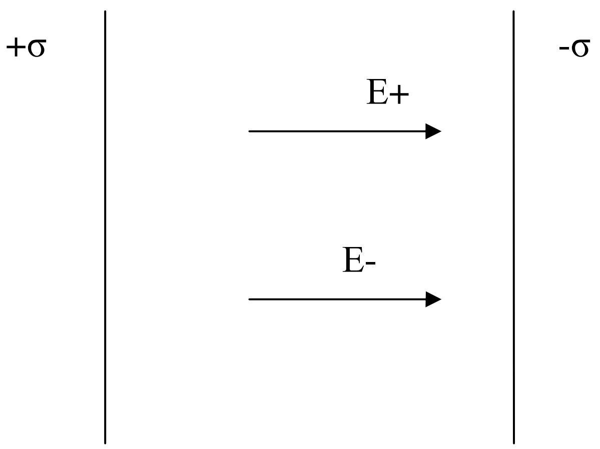


Рис.

По принципу суперпозиции полей электрическое поле внутри плоского конденсатора есть сумма полей, создаваемых заряженными плоскостями его обкладок.

Следовательно, напряженность электрического поля между обкладками конденсатора:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

3. Бесконечно длинный прямой провод, равномерно заряженный по длине, с линейной плотность заряда τ. В этом случае на проводе сосредоточен заряд:

$$q = \tau \cdot l\,.$$

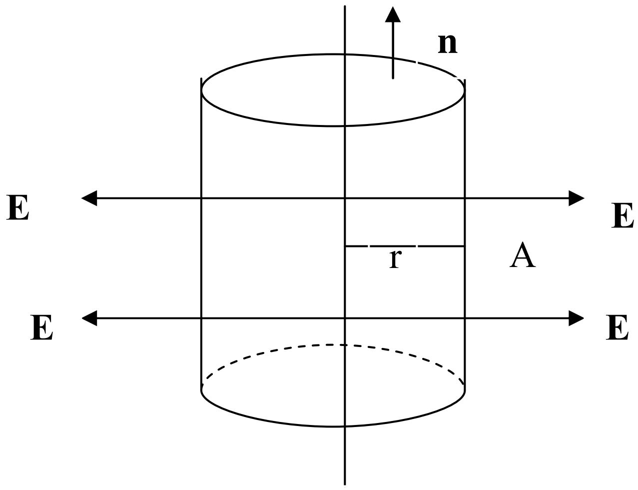


Рис.

Найдем напряженность электростатического поля в ч. А (Рис.)

Из условий симметрии задачи в качестве замкнутой поверхности удобно выбрать цилиндр, образующие которого перпендикулярны к линиям напряженности электростатического поля. Учитывая, что площадь поверхности цилиндра можно разбить на сумму площадей оснований и площадь боковой поверхности, из определения потока вектора напряженности электростатического поля имеем:

$$N = \oint_S \mathbf{En}dS = \int_{S_{осн}} \mathbf{En}dS + \int_{S_{осн}} \mathbf{En}dS + \int_{S_{бок}} \mathbf{En}dS \qquad (9)$$

Так как вектор нормали к площади основания перпендикулярен вектору **E,** то

$$\int_{S_{осн}} \mathbf{En}dS = 0.$$

Следовательно, из (9) имеем:

$$N = E_A \cdot S_{бок}\,. \quad (10)$$

По теореме Остроградского-Гаусса:

$$\oint_S \mathbf{E}\mathbf{n}dS = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\tau \cdot l}{\varepsilon_0}. \qquad (11)$$

Сравнивая (10) и (11) получаем выражение для напряженности электростатического поля, создаваемого бесконечным прямым проводом, равномерно заряженным по длине с линейной плотностью заряда τ в т. А:

$$E \cdot 2\pi r \cdot l = \frac{\tau \cdot l}{\varepsilon_0}$$

Отсюда:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

4. Однородный шар, равномерно заряженный по объему с объемной плотностью заряда ρ. В этом случае внутри шара сосредоточен заряд

$$q = \rho \cdot V,$$

где $V = \frac{3}{4}\pi R^3$ - объем заряженного шара,

R – радиус заряженного шара.

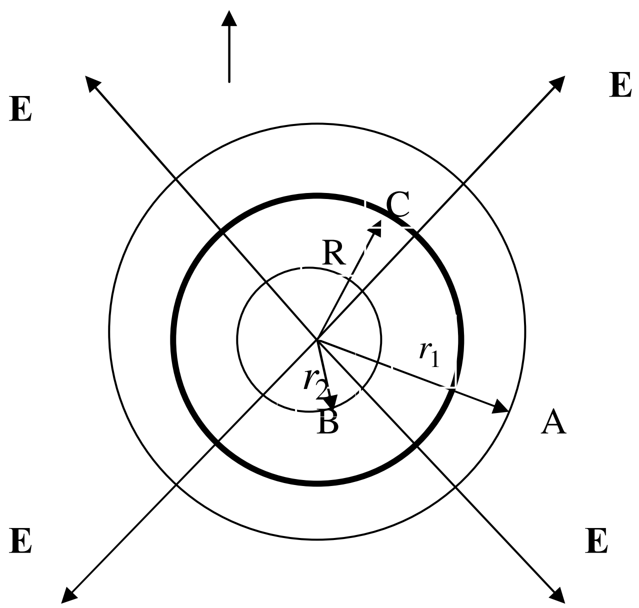


Рис.

Задачу разобьем на три части:

а) определим электростатического поля вне заряженного шара (т. А), б) определим напряженность поля внутри заряженного шара (т. В),

в) определим напряженность поля на поверхности заряженного шара.

Из условия симметричности задачи и что линии напряженности электростатического поля могут быть только радиальными прямыми в качестве замкнутой поверхности удобно выбрать сферу с центром в центре заряженного шара. Найдем напряженность электростатического поля в т. А. Из определения потока вектора напряженности через замкнутую поверхность (сфера радиусом r_1) имеем:

$$\text{N}=\oint_S E_n dS = E_A \cdot 4\pi r_1^2 \qquad (12)$$

По теореме Остроградского – Гаусса:

$$N = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad (13)$$

Сравнивая (12) и (13), имеем:

$$E_A \cdot 4\pi r_1^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Отсюда:

$$E_A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}, \quad (14)$$

Или, учитывая, что $q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$, имеем

$$E_{A=} \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r_1^2}, \quad (15)$$

где r_1 - расстояние от центра заряженного шара до т. А.

Из (14) следует, что напряженность поля создаваемого равномерно заряженным по объему шаром аналогично полю точечного заряда, равному заряду шара и сосредоточенному в центре этого шара.

Найдем напряженность поля в т. В. Из определения потока вектора напряженности через замкнутую поверхности через замкнутую поверхность (сфера радиуса r_2), имеем:

$$N = \oint_S E_n dS = E_B \cdot 4\pi r_2^2 \qquad (16)$$

По теореме Остроградского – Гаусса:

$$N = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Сравнивая (16) и (17), имеем:

$$E_B \cdot 4\pi r_2^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Заряд, сосредоточенный внутри выбранной сферы радиуса r_2:

$$q = \frac{4}{3}\pi r_2^3$$

Следовательно:

$$E_B = \frac{\rho r_2}{3\varepsilon_0}$$

Напряженность поля на поверхности заряженного шара (т. С)

$$E_c = \frac{\rho R}{3\varepsilon_0}.$$

Работа сил электрического поля. Потенциал. Разность потенциалов.

При перемещении зарядов под действием сил электрического поля совершается работа. Рассмотрим работу электрических сил по перемещению заряда q_0 в поле точечного заряда q.

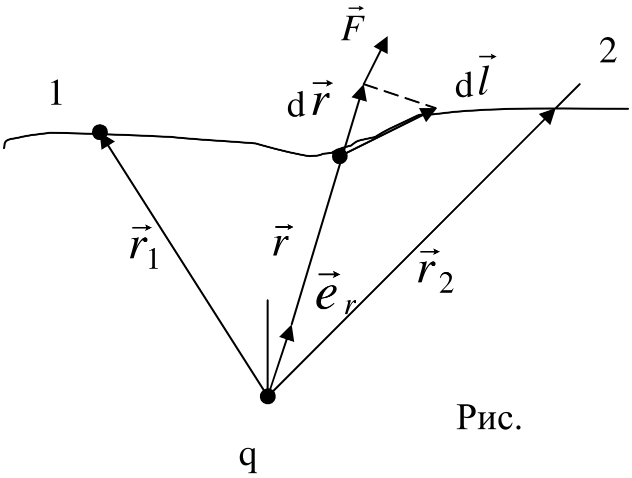


Рис.

$$\mathrm{dA} = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = F\cdot dl\cos(\mathbf{F}\,\hat{}\,d\mathbf{l})$$

$$A_{12} = \int_1^2 \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{e}_r\cdot d\mathbf{l}$$

Произведение $\mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{l} = d\mathbf{r}$ есть приращение радиус – вектора **r**.

Тогда $$A_{12} = \int_1^2 F(r)dr$$

Или $$A_{12} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_1^2\frac{dr}{r^2} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})$$

Если поле создано системой зарядов q_i, то работа электрических сил по перемещению заряда q_0:

$$A_{12} = \sum_{i=1}^{n}\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{i_1} - \frac{1}{i_2})$$

Работа по перемещению заряда q_0 не зависит от траектории его движения. Работа электрических сил по перемещению заряда q_0 по замкнутому контуру равна нулю (силовые линии электростатического поля не замкнуты), следовательно, электростатическое поле консервативно. Работу сил консервативного поля можно представить как убыль потенциальной энергии:

$$A_{12} = -\Delta W = W_{n_1} - W_{n_2}$$

Для поля, созданного системой зарядов:

$$W_{n_1} - W_{n_2} = q_0\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{i_1} - \frac{1}{i_2})$$

Следовательно:

$$W_n = \sum\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_iq_0}{r_i} + C$$

Значение const C выбирают из условия: $W_n \to 0$ при $r_i \to \infty$. Следовательно, C=0.

Величина $\varphi = \frac{W_n}{q_0}$ называется потенциалом и является энергетической характеристикой электрического поля. Для поля, созданного точечным зарядом q_i

$$\varphi_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{r_i}$$

Если поле создано системой зарядов:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i$$

Если заряды распределены непрерывно, то

$$\varphi = \int_{(q)} \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Работа по перемещению заряда q в электрическом поле из точки 1 в точку 2 будет равна

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2) = -q\Delta\varphi,$$

где $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ - приращение потенциала может быть и положительной и отрицательной

Разность потенциалов численно равна работе по перемещению единичного положительного заряда из одной точки поля в другую. Потенциал численно равен работе сил электрического поля по перемещению единичного положительного заряда из данной точки поля в точку, где потенциал равен нулю и, следовательно, $r_2 = \infty$.

Связь напряженности с потенциалом.

Работа сил электрического поля по перемещению заряда q_0:

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = q_0\mathbf{E}d\mathbf{l} = -q_0 d\varphi$$

Отсюда
$$\mathbf{E} = -\frac{d\varphi}{d\mathbf{l}} = -qrad\varphi$$

Величина $\frac{d\varphi}{dl}$ называется градиентом потенциала и указывает быстроту перемещения потенциала при перемещении в направлении, перпендикулярном к эквипотенциальным поверхностям в сторону его увеличения. Следовательно: напряженность поля численно равна градиенту потенциала:

$$\mathbf{E} = -qrad\varphi$$

Здесь $grad\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k}$.

Общая задача электростатики: по заданному распределению потенциала найти проекции вектора напряженности электростатического поля в каждой точке на любое направление, в т.ч. $E_{x,}E_{y,}E_{z.}$

Распределение потенциала можно либо определить экспериментально, либо вычислить. Если в пространстве заряды распределены равномерно с объемной плотностью ρ, то распределение потенциала можно получить, используя уравнение Пуассона:

$$div\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

где
$$div\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

если в пространстве отсутствуют заряды, то распределение потенциала можно получить, используя уравнение Лапласа:

$$div\varphi = 0$$

Если в электрическом поле через точки, в которых значение потенциала одинаково, провести поверхность, то она будет называться эквипотенциальной, т.е. поверхностью равного потенциала. Уравнение эквипотенциальной поверхности:

$$\varphi(x,y,z)=\text{const}$$

Следовательно:

$$\mathbf{E} = -\frac{d\varphi}{d\mathbf{l}} = 0$$

Таким образом, проекция вектора **E** на эквипотенциальную поверхность равна нулю, и силовые линии перпендикулярны к эквипотенциальным поверхностям.

Диэлектрики в электрическом поле

По электрическим свойствам вещества можно разделить на три группы: 1) проводники, 2) полупроводники, 3) диэлектрики

Проводники – вещества, у которых при нормальных условиях есть свободные носители заряда: в металлы – электроны, в электролиты – ионы, в ионизированных газах – электроны и ионы.

При наложении внешнего электрического поля в этих веществах свободные заряды начинают двигаться упорядоченно, т.е. возникает электрический ток.

Полупроводники – вещества, у которых при нормальных условиях концентрация свободных зарядов мала и, следовательно, их электрическая проводимость тоже мала. Под действием внешних источников энергии концентрация свободных носителей заряда в полупроводниках может увеличиваться и, следовательно, увеличивается электрическая проводимость.

Диэлектрики – вещества, у которых при нормальных условиях практически нет свободных зарядов.

Электрическое поле в веществе

По электрическим свойствам различают полярные и неполярные диэлектрики. У полярных диэлектриков при нормальных условиях молекулы можно рассматривать как диполи.

Диполь – совокупность двух точечных зарядов, равных по величине и противоположенных по знаку, связанных между собой и находящихся на некотором расстоянии друг от друга (Рис.).

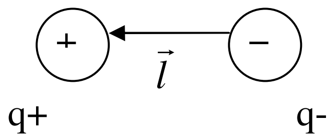


Рис.

Электрические свойства диэлектриков характеризует электрический момент диполя:

P=q**l**

Для количественной характеристики поляризации диэлектрика служит физическая величина, называемая вектором поляризации.

Вектором поляризации диэлектрика (поляризуемостью) называют электрический момент единицы объема диэлектрика:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{V}\sum_i \mathbf{P}_i$$

У полярных молекул l = const следовательно P = const. Такие диэлектрики называют жесткими (например, вода H_2O).

Неполярные диэлектрики – молекулы при нормальных условиях не являются диполями. Центры положительных и отрицательных зарядов совпадают. Если неполярный диэлектрик внести в электрическое поле, то молекулы становятся диполями. Это происходит за счет деформации электронных облаков, атомов диэлектрика во внешнем электрическом поле.

У неполярных диэлектриков дипольный момент зависит от напряженности внешнего электрического поля. **p**=$\alpha\varepsilon_0$**E**, **E** – напряженность электрического поля, действующего на молекулу. β – поляризуемость молекулы зависит от природы молекулы, β>0.

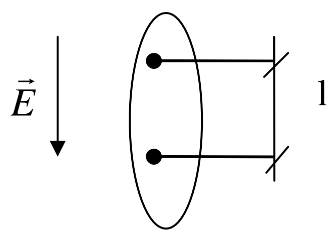


Рис.

Такие диполи называются мягкими (H_2, NO_2).

Диполь в электрическом поле

Поместим диполь в однородное электрическое поле (Рис.).

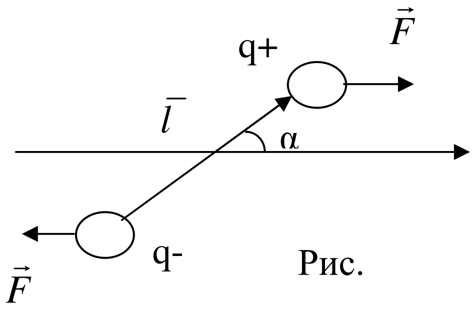


Рис.

Найдем силу, действующую на диполь в однородном электрическом поле. Сила, действующая на положительный заряд:

$$\mathbf{F}^{+} = q^{+}\mathbf{E}$$

Сила, действующая на отрицательный заряд:

$$\mathbf{F}^{-} = q^{-}\mathbf{E}$$

Причем: $\mathbf{F}^{-} = \mathbf{F}^{+}$

Момент этой пары сил:

$$M = F\cdot l\sin\alpha = qEl\sin\alpha = pE\sin\alpha = PE\sin(\mathbf{p}\cdot\mathbf{E})$$

$$\mathbf{P}=q\mathbf{l}$$

электрический момент диполя

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}]$$

В однородном поле на диполь действует пара сил, которая стремиться повернуть диполь таким образом, чтобы вектора **P** и **E** были параллельны.

Рассмотрим теперь диполь в неоднородном электрическом поле.

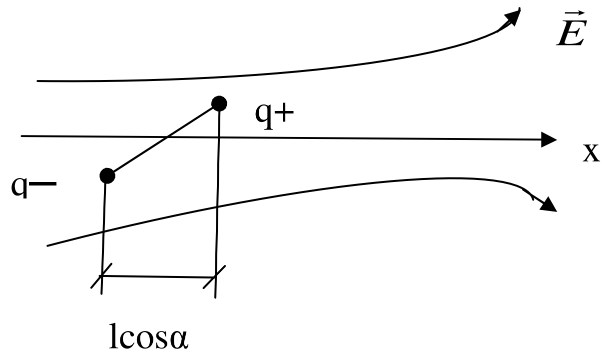


Рис.

Положительный заряд смещён по оси x относительно отрицательного на $\Delta x = l\cos\alpha$. Напряженность поля в точках, где помещаются заряды, различается на величину

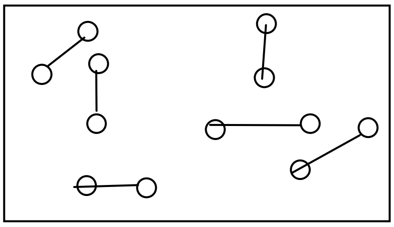


Рис.

$$\Delta E = \frac{dE}{dx}\Delta x = \frac{dE}{dx} l\cos\alpha$$

Если диполь находится в неоднородном поле, то на него будет действовать сила, параллельная внешнему электрическому полю и сила, втягивающая диполь в область более сильного поля.

Поляризация полярных диэлектриков (ориентационная поляризация). Свободные и связанные заряды.

Рассмотрим полярный диэлектрик. Он состоит из диполей, ориентированных в отсутствии внешнего электрического поля таким образом, что векторная сумма дипольных моментов всех молекул равна нулю, т. е. $\sum_i P_i = 0$.(Рис.)

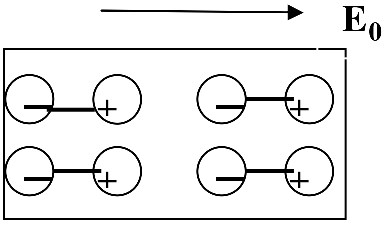


Рис.

Если внести такой диэлектрик во

внешнее электрическое поле, то диполи под действием внешнего поля будут ориентироваться таким образом, что одной поверхности диэлектрика возникает тонкий слой положительных зарядов, на другой – отрицательных зарядов. Такие заряды называют полиризационными или связанными. Их нельзя разделить, так как все заряды диэлектрика связаны с атомами и молекулами вещества. Внутри диэлектрика суммарный заряд равен нулю.

Явление возникновения связанных зарядов на поверхности диэлектрика под действием внешнего поля называется поляризацией. Поляризация связана с ориентацией диполей во внешнем электрическом поле, поэтому называется ориентационной.

Поляризация неполярных диэлектриков связана с деформацией электронных облаков атомов во внешнем электрическом поле.

Связь вектора поляризации с поверхностной плотностью поляризационных зарядов

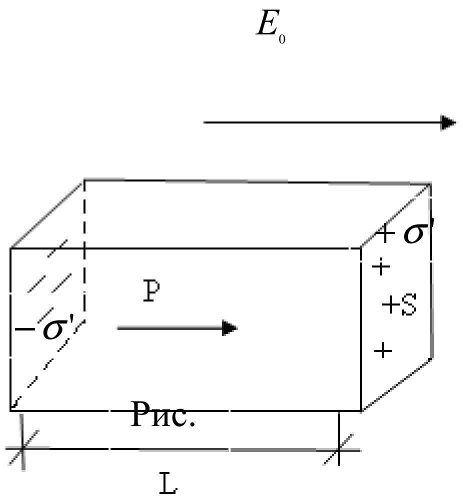


Рис.

Рассмотрим диэлектрик во внешнем электрическом поле напряженностью $\mathbf{E_0}$. Пусть S - площадь поляризованной поверхности.

Поляризованный однородный диэлектрик можно рассматривать как макроскопический диполь, электрический момент которого:

$$P = q'L = \sigma' \cdot S \cdot L$$

Вектор поляризации диэлектрика P_0 - это электрический момент единицы объёма, т. е.

$$P_0 = \frac{\sigma' \cdot S}{V} L = \sigma'$$

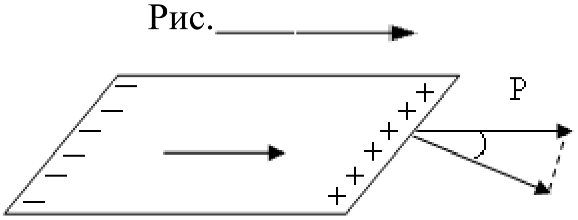
Следовательно:

$$P_0 = \sigma'$$

Если вектор $\mathbf{P_0}$ составляет с нормалью к поверхности S диэлектрика угол α (Рис.), то поверхностная плотность связанных зарядов σ’ равна нормальной составляющей вектора поляризации:

$$P_n = P_0 \cos\alpha = \sigma'$$

Рис.



Поляризуемость численно равна величине поляризационных зарядов на единицу площади, перпендикулярной вектору поляризации. Для изотропных диэлектриков (вектор поляризации не зависит от направления поля):

$$\mathbf{P}_0 = æ \cdot \varepsilon_0 \cdot \mathbf{E}$$

где $\mathbf{E}$ – суммарная напряженность электрического поля в диэлектрике $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'$, Н$\mathbf{E}'$ - напряженность поля, создаваемого связанными зарядами, æ - диэлектрическая восприимчивость. Диэлектрическая восприимчивость является величиной положительной (æ>0) и характеризует способность диэлектриков к поляризации во внешнем электрическом поле. Диэлектрическая восприимчивость зависит от природы диэлектрика и температуры.

Электрическое поле в диэлектрике. Относительная диэлектрическая проницаемость.

Поместим диэлектрик во внешнее электрическое поле $\mathbf{E_0}$, которое создано между обкладками конденсатора (Рис.). В диэлектрике, внесенном во внешнее электрическое поле, между обкладками конденсатора возникает поляризация. На поверхности диэлектрика, обращенной к отрицательной

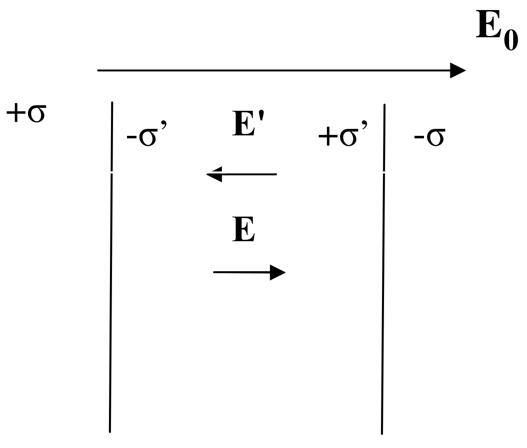


Рис.

пластине, возникает некомпенсированные положительные заряды, а на поверхности, обращенной к положительной пластине – отрицательные заряды. Эти заряды носят названия связанных зарядов и их можно считать распределёнными на поверхности диэлектрика с постоянной поверхностной плотностью +σ’ и –σ’ соответственно. В результате в диэлектрике создается дополнительное электрическое поле **E’,** образованное связанными зарядами, направленными в сторону, противоположную направлению электрического поля, создаваемого обкладками конденсатора. Результирующее электрическое поле в диэлектрике **E** согласно принципу суперпозиции полей будет:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \vec{\mathbf{E}}'$$

или

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \mathbf{E}'$$

Следовательно напряженность электрического поля в вакууме всегда больше, чем в присутствии диэлектрика, вследствие поляризации диэлектрика.

Силы взаимодействия между одними и теми же зарядами в вакууме больше, чем в диэлектрике. Величина, показывающая во сколько раз сила взаимодействия между зарядами в вакууме больше чем в диэлектрике, называется относительной диэлектрической проницаемостью среды -ε.

Закон Кулона сила взаимодействия между точечными зарядами, помещенными в однородный безграничный диэлектрик в ε раз меньше силы взаимодействия между теми же зарядами в вакууме.

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\varepsilon \cdot r^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

Напряженность поля, создаваемая точечным зарядом, помещенным в однородный безграничный диэлектрик в ε раз меньше напряженности поля создаваемой тем же зарядам в вакууме.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

Напряженность электрического поля

Если пространство между обкладками конденсатора заполнено диэлектриком с относительной проницаемостью ε, то напряженность электрического поля между обкладками конденсатора будет

$$\mathrm{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} \qquad (1)$$

С другой стороны, напряженность поля в диэлектрике, помещенном во внешнее электрическое поле (E_0) выражается следующим образом:

$$\mathrm{E} = \mathrm{E}_0 - E' = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} \qquad (2)$$

где E_0 - напряженность внешнего электрического поля,

E' - напряженность электрического поля, создаваемого связанными зарядами,

σ - поверхностная плотность свободных зарядов,

σ'- поверхностная плотность связанных зарядов.

Сравнивая (1) и (2), имеем:

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

Отсюда выразим относительную диэлектрическую проницаемость ε среды через поверхностные плотности свободных (σ) и связанных (σ') зарядов

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\sigma - \sigma'}$$

Электрическое смещение

Так как электрическое поле в диэлектрике создается как свободными, так и связанными зарядами, то согласно принципу суперпозиции полей напряженность поля в диэлектрике равна геометрической сумме напряженностей полей свободных (E_0) и связанных (**E'**) зарядов:

$$E = E_0 + E$$

Однако расчет напряженности поля в присутствии диэлектрика затруднен, поскольку не известна поверхностная плотность связных зарядов. Для удобства расчета напряженности поля в неоднородных средах вводят вектор электрического смещения (электрической индукции) **Д**, который характеризует электрическое поле и определяется следующим образом:

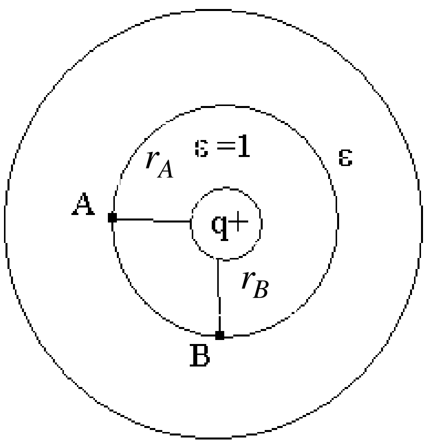
для вакуума:

$$\mathbf{Д}_0 = \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

для среды с диэлектрической проницаемостью ε:

$$\mathbf{Д} = \varepsilon\varepsilon_0 \mathbf{E}$$

Покажем, что вектор электрического смещения **Д** не зависит от свойств среды, в которой находится заряженное тело. Окружим заряд q+, являющийся источником электрического поля, шаровым слоем диэлектрика с относительной диэлектрической проницаемостью ε (рис.). Выберем точку A и точку B таким образом, что расстояние до них от точечного заряда q+ примерно равны, т.е.



$$r_A \sim r_B$$

Напряженность поля в т. А.

$$E_A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_A^2} \qquad (1)$$

Напряженность поля в т. В.

$$E_B = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_B^2} \qquad (2)$$

Электрическое смещение в т. А.

$$Д_A = Д_0 = \varepsilon_0 E_A = \frac{q}{4\pi r_A^2} \quad (3)$$

Электрическое смещение в т. В.

$$Д_B = \varepsilon\varepsilon_0 E_B = \frac{q}{4\pi r_B^2} \quad (4)$$

Сравнивая (3) и (4), имеем:

$$Д_A = Д_B; \quad Д_0 = Д$$

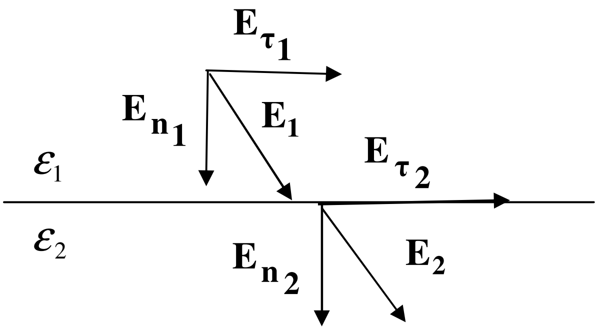


Рис.

При проходе через границу раздела нормальная составляющая вектора напряженности электрического поля **Е** изменяется в ε раз. Нормальная составляющая вектора электрического смещения **Д** непрерывна при проходе через границу раздела. Граничные условия для векторов напряженности Е и электрического смещения Д при переходе из одного диэлектрика в другой имеют вид:

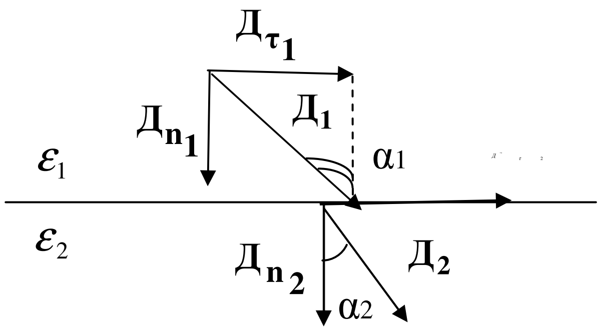
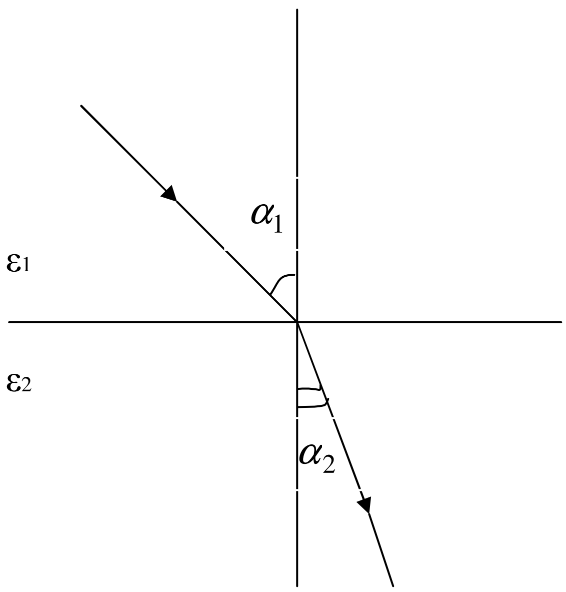


Рис.



$$\mathbf{E}_{\tau_1} = \mathbf{E}_{\tau_2}$$

$$\varepsilon_1 \mathbf{E}_{\mathbf{n_1}} = \varepsilon_2 \mathbf{E}_{\mathbf{n_2}}$$

$$\mathbf{Д}_{n_1} = \mathbf{Д}_{n_1}$$

При переходе через границу раздела двух сред силовые линии электростатического поля преломляются (рис.). Закон преломления силовых линий электростатического поля имеет вид:

$$tg\alpha_2 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} tg\alpha_1$$

Связь вектора электрического смещения с поляризуемостью

Электрическое поле в диэлектрике создается свободными и связанными зарядами, следовательно результирующая напряженность поля в диэлектрике, по принципу суперпозиции полей, будет

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'$$

где $\mathbf{E_0}$ - напряженность поля создаваемая связанными зарядами, $\mathbf{E_0}$ - напряженность поля, создаваемая свободными зарчдами.

Напряженность поля, создаваемая связанными зарядами, выражается через поверхностную плотность связанных зарядов следующим образом:

$$E = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}$$

Поверхностная плотность связанных зарядов вырази через поляризации P_0

$$\sigma' = |\mathbf{P}_0| \qquad (1)$$

Для изотропных диэлектриков

$$\mathbf{P_0} = æ\,\varepsilon_0 \mathbf{E} \quad (2)$$

Следовательно, учитывая (1) и (2) имеем:

$$\mathbf{E} = \frac{\chi \varepsilon_0 \mathbf{E}}{\varepsilon_0} = \mathbf{E}\chi$$

Или в скалярном виде

$$E_0 = E(1 + \chi) \quad (3)$$

Относительная диэлектрическая проницаемость ε показывает, во сколько раз диэлектрик ослабляет высшее поле, т. е.

$$\varepsilon = \frac{E_0}{E} = (1 + \chi)$$

Отсюда

$$\varepsilon = 1 + \chi$$

χ - диэлектрическая восприимчивость.

Для полярных диэлектриков

$$\chi = \frac{n_0 P_0^2}{3\varepsilon_0 kT}$$

где n_0 - концентрация молекул,

P_0 - дипольный момент полярной молекулы,

к – постоянная Больцмана,

Т – температура.

Для полярных молекул

$$\chi = n_0 \alpha ,$$

где α- поляризуемость неполярной молекулы.

Учитывая, что $\sigma' = \frac{P_0}{\varepsilon_0}$, для напряженности поля в диэлектрике имеем:

$$E = E_0 - \frac{P_0}{\varepsilon_0} \quad (4)$$

Умножим обе части уравнения (4) на ε_0

$$E\varepsilon_0 = E_0\varepsilon_0 - P_0$$

Отсюда

$$\varepsilon_0 E_0 = E\varepsilon_0 + P_0$$

Или, учитывая, что $Д_0 = \varepsilon_0 E_0$, получим связь вектора электрического смещения с полярностью:

$$\mathbf{Д}_0 = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_0$$

Теорема Остроградского - Гаусса для электрического поля в веществе

Электрическое поле в веществе создается свободными и связанными электрическими зарядами. По принципу суперпозиции полей:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\mathbf{св}} + \mathbf{E}_{\mathbf{связ}}$$

Следовательно, теорема Остроградского-Гаусса для электрического поля в веществе:

$$\oint\limits_S (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) dS = \frac{1}{\varepsilon_0}(q_{св} + q_{связ})$$

$$\text{где} \quad q_{связ} = -\oint\limits_S (\mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{n}) dS$$

Учитывая, что

$$\mathbf{Д} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_0,$$

Получим

$$\oint\limits_S (\mathbf{Д} \cdot \mathbf{n}) dS = q_{св}$$

Поток вектора электрического смещения электростатического поля через производную замкнутую поверхность, пропорционален алгебраической сумме свободных зарядов, охватываемых этой поверхностью.

Проводники в электрическом поле

Свободные носители заряда в проводнике способны перемещаться под действием сколь угодно малой силы. Для равновесия зарядов на проводнике необходимо выполнение следующих условий:

1) Напряженность поля на поверхности проводника **E**=0 => φ внутри проводника = const ($E = \frac{d\varphi}{dl}$) и равен потенциалу поверхности проводника.

2) Напряженность поля на поверхности проводника в каждой точке должна быть ⊥ поверхности.

Если проводнику сообщить заряд, то он располагается на внешней поверхности проводника (из-за электростатического отталкивания одноименных зарядов). Поэтому при равномерном распределении заряд внутри проводника равен нулю и, следовательно, напряженность электрического поля равен нулю, что следует и из теоремы Остроградского-Гаусса.

При внесении незаряженного проводника в электрическое поле носители заряда приходят в движение: положительные - в направлении **E;** отрицательные – в противоположную сторону. В результате на концах проводника возникнут индуцированные заряды. Индуцированные заряды распределяются по внешней поверхности проводника. Если внутри проводника имеется полость, то при равновесном распределении поле внутри её равно 0=> электростатическая защита.

Электроёмкость уединенного проводника.

Уединенный проводник - это проводник, который находится столь далеко от других проводников, что электрическим влиянием их можно пренебречь. Если уединенный проводник находится в однородном изотропном диэлектрике, то заряд q проводника распределен по его поверхности с поверхностной плотностью σ. Потенциал φ уединенного проводника пропорционален его зеряду:

$$\varphi = \frac{1}{c} q$$

Величина С, равная отношению заряда уединенного проводника к его потенциалу φ, называется электрической емкостью (электроемкостью) этого проводника и характеризует способность проводников накапливать электрические заряды.

$$C = \frac{q}{\varphi}$$

Электрическая емкость уединенного проводника численно равнп заряду, который нужно сообщить этому проводнику, чтобы изменить его потенциал на единицу. Размерность электроемкости

$$[C] = \text{Фарада} = \frac{Кл}{B}.$$

Электрическая емкость уединенного проводника зависит от формы, размеров проводника и от диэлектрических свойств среды в которой находится проводник и не зависит от материала проводника. Для геометрически подобных проводников электрическая емкость пропорциональна их линейным размерам.

Например, для шара радиусом R имеем:

$$\varphi = -\int_{\infty}^{R} E_r dr = \int_{\infty}^{R} \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}$$

Отсюда электрическая емкость шара пропорциональна его размеру:

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R$$

Взаимная ёмкость. Конденсаторы.

Уединенные проводники, как правило, обладают малой ёмкостью. Если вблизи некоторого проводника А есть другие проводники, то ёмкость проводника А повышается. У проводника В вблизи проводника А индуцируются заряды противоположного знака, и поле проводника А ослабляется. Потенциал на поверхности проводника А уменьшается, заряд остается прежним. Следовательно, ёмкость увеличивается. Для близко расположенных друг к другу проводников, заряженных по абсолютной величине, разность потенциалов этих проводников φ_1 и φ_2 пропорциональна заряду q.

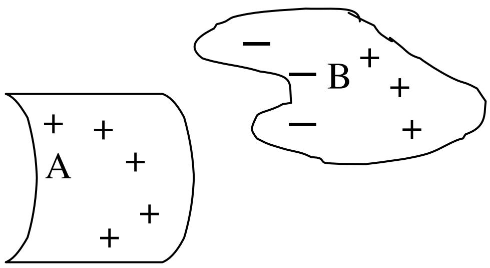


Рис.

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{1}{C} q ,$$

где C - взаимная электроемкость двух проводников:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} .$$

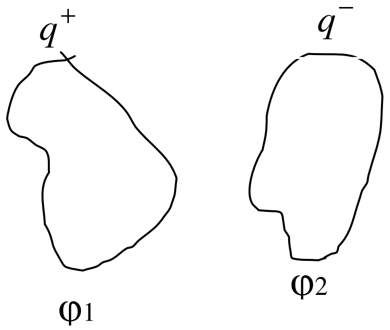


Рис.

Взаимная ёмкость численно равна заряду, который нужно перенести с одного проводника на другой для изменения разности потенциалов между ними на единицу. Взаимная ёмкость двух проводников зависит от их формы, размеров, взаимного расположения и диэлектрической проницаемости окружающей среды.

Конденсаторы – система из двух проводников, разделеных диэлектриком разноименно заряженных равными по величине зарядами, форма и размещение которых обеспечивают локализацию поля между обкладками. Сами проводники называются в этом случае обкладками конденсатора.

Ёмкость конденсатора представляет собой взаимную емкость его обкладок:

$$C = \frac{q}{U} ,$$

где U - напряжение между обкладками конденсатора

Напряженность электрического поля между двумя пластинами:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0 S}$$

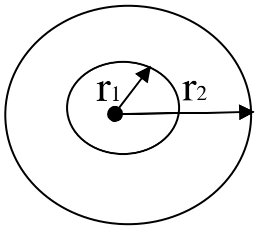
$$U = E \cdot d = \frac{qd}{\varepsilon\varepsilon_0 S} = \frac{q}{C}$$

Следовательно, ёмкость плоского конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$$

где S – площадь обкладок конденсатора;

d – расстояние между обкладками.

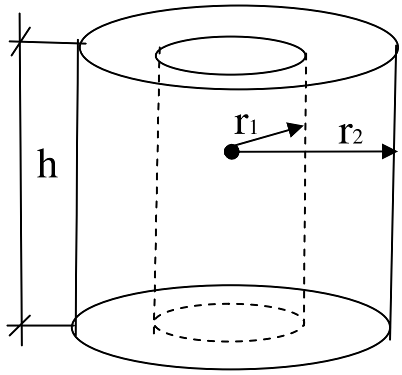


Ёмкость сферического конденсатора:

$$C = \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 \, r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$

Ёмкость цилиндрического конденсатора:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 h}{\ln(\frac{r_2}{r_1})}$$



Соединение конденсаторов

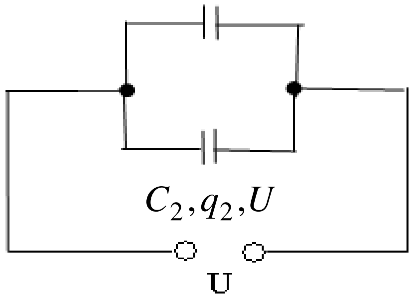


Рис.

Различают параллельное и последовательное соединение на конденсаторов. При параллельном соединении конденсаторов напряжение на конденсаторах одинаковое. Заряд на первом конденсаторе

$$q_1 = C_1 U \ ,$$

заряд на втором конденсаторе

$$q_2 = C_2 U \ .$$

Общий заряд батареи параллельно соединенных конденсаторов равен сумме зарядов отдельных конденсаторов:

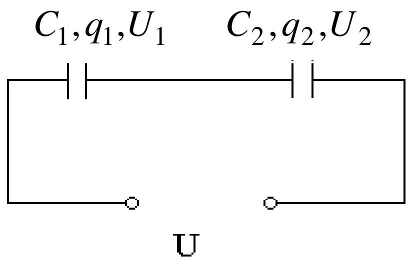
$$q = q_1 + q_2 = U(C_1 + C_2).$$

Следовательно, для получения больших емкостей, конденсаторы соединяют параллельно , при этом общая емкость батареи параллельно соединенных конденсаторов $C_{пар}$ равна сумме емкостей всех n конденсаторов, входящих в батарею:

$$C_{пар} = \sum_{i=1}^{n} C_i \ .$$

При последовательном соединении конденсаторов (Рис.) заряды всех конденсаторов одинаковы. Напряжение на первом конденсаторе:

$$U_1 = \frac{q}{C_1}.$$



Напряженность на втором конденсаторе:

$$U_2 = \frac{q}{C_2}$$

Напряженность на батареи конденсаторов равно сумме напряжений на каждом конденсаторе

$$U = U_1 + U_2 = q(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2})$$

Отсюда

$$\frac{U}{q} = \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Общая емкость батареи последовательно соединенных n конденсаторов

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} C_i}$$

Емкость батареи последовательно соединенных конденсаторов всегда меньше минимальной емкости C_i, входящей в батарею.

Энергия заряженного проводника

Сообщение проводнику заряда связано с совершением работы по преодолению кулоновских сил отталкивания между одноименными зарядами. Работа по переносу заряда dq из бесконечности на уединенный проводник равна

$$dA = \varphi dq = c\varphi d\varphi$$

Работа по увеличению потенциала проводника от 0 до φ

$$A = \int_0^{\varphi} c\varphi d\varphi = \frac{c\varphi^2}{2}$$

Следовательно, энергия уединенного проводника

$$W = \frac{c\varphi^2}{2} = \frac{q^2}{2c} = \frac{q\varphi}{2}$$

Энергия конденсатора

При разряде конденсатора совершается работа численно равна:

dA=Udq=CUdU

Работа при разряде конденсатора равна энергии заряженного конденсатора.

$$A = W = C \int_0^U UdU = \frac{1}{2}CU^2$$

Следовательно

$$W = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2C}q^2 = \frac{1}{2}qU$$

Энергия электрического поля

Энергию заряженного конденсатора можно выразить через величины, характеризующие электрическое поле в пространстве между обкладками.

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{2d}U^2 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2}(\frac{U}{d})^2 Sd = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2}(\frac{U}{d})^2 V = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}V$$

Плотность энергии:

$$W = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{EД}{2} \quad (1)$$

Формула (1) представляет собой общее выражение для энергии электрического поля. энергию электрического поля через объемную плотность можно получить следующим образом:

$$W = \int_V \omega dV .$$

Постоянный электрический ток

Электрическим током называется всякое упорядоченное движение электрических зарядов. Различают ток проводимости, конвекционный ток, ток смещения

Ток проводимости – это электрический ток, возникающий в проводящих средах в результате упорядоченного движения свободных зарядов под действием электрического поля, создаваемого в этих средах. Примерами токов проводимости является ток в металлах и полупроводниках, связанный с упорядоченным движением свободных электронов, ток в электролитах, представляющий собой упорядоченное движение положительных и отрицательных ионов.

Конвекционный ток – это упорядоченное движение в пространстве заряженных макроскопических тел. Примером такого тока является ток, связанный с движением Земли, которая имеет избыточный отрицательный заряд, по ее орбите.

Ток смещения – обусловлен скоростью уменьшения электрического поля, создающего магнитное поле, и служит количественной мерой магнитного действия переменного электрического поля.

Направлением электрического тока считается направление упорядоченного движения положительных электрических зарядов. В действительности, в металлических проводниках ток осуществляется упорядоченным движением электронов, которые движутся в направлении, противоположном направлению тока.

Условия возбуждения тока проводимости:

а) наличие в данной среде свободных носителей заряда. Свободные носители заряда в металлах и полупроводниках являются электроны и дырки; в электролитах – положительные и отрицательные ионы; в газах – положительные и отрицательные ионы и электроны;

б) существование в данной проводящей среде внешнего электрического поля (в проводнике – это наличие разности потенциалов на концах проводника). Учитывая, что $E = \frac{\Delta\varphi}{\Delta l}$ и, если E≠0, то Δφ ≠0, следовательно $\varphi_1 = \varphi_2$. При отсутствии внешнего электрического поля (E=0) электроны в проводнике совершают беспорядочное тепловое движение со скоростью

$$V_m = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \sim 10^5 \text{ м/с}$$

Так как тепловое движение хаотично, то $\mathbf{V_T} = 0$ и электрический ток не возникает.

При наложении внешнего электрического поля на свободные электроны в проводнике действует сила ***F*** = *e*E со стороны электрического поля и электроны приобретают направленную скорость (дрейфовая скорость), следовательно, возникает электрический ток.

Условие существования тока в цепи

1) Поддерживание электрического внешнего поля в проводнике, т.е. разности потенциалов на концах проводника. Действие электрических сил приводит к выравниванию потенциалов на концах проводника и, следовательно, к прекращению тока в цепи. Для поддержания разности потенциалов необходимо действие сил не электрического происхождения (сторонних сил). Устройства, в которых действуют сторонние силы,

называются источниками тока. В источниках тока происходит превращение различных видов энергии в электрическую.

Пусть имеются 2 заряженных тела $\varphi_1 > \varphi_2$

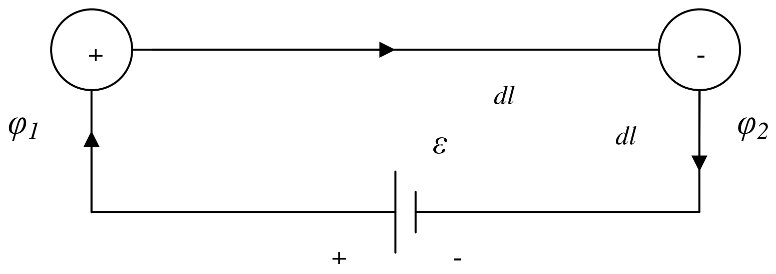


Рис.

Если соединить их проводником, то по нему потечет ток. Для того чтобы по проводнику ток шел непрерывно, на концах проводника необходимо поддерживать постоянную разность потенциалов. Это достигается устройствами, в которых происходит разделение разрозноименных зарядов: положительные заряды доставляют к положительному полюсу, отнимая их у отрицательно заряженного тела. Этот процесс осуществляют силы неэлектрического происхождения. Такие силы совершают работу в источниках тока. Источники тока – устройства, в которых за счет сил стороннего поля происходит разделение положительных и отрицательных зарядов.

Найдем работу, которая совершается на участке dl

$$dA = F \cdot dl$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{эл}} + \mathbf{F}_{\text{ст}} = q_0\mathbf{E}_{\text{эл}} + q_0\mathbf{E}_{\text{ст}}$$

$$dA = q_0 E_{эл} dl + q_0 E_{cm} dl$$

Работа стороннего и электрического поля по перемещению единичного положительного заряда на данном участке цепи называется напряжением на данном участке.

$$\tfrac{1}{q} A = \int E_{эл} dl + \int E_{cm} dl = U$$

Если на участке цепи источник тока отсутствует, то

$$U = \int E_{эл} dl = -\int \frac{d\varphi}{dl} dl = -\int d\varphi = -(\varphi_1 - \varphi_2) = \varphi_2 - \varphi_1$$

На участке цепи, где отсутствуют источники тока, напряжение равно разности потенциалов.

Если заряд перемещается по замкнутому контуру, то работа электрических сил равна нулю.

$$\frac{A}{q} = \oint_l E_{эл} dl + \oint_l E_{ст} dl = \oint_l E_{ст} dl$$

Величина, численно равная работе по перемещению единичного положительного заряда по замкнутому контуру, называется ЭДС источника.

$$\varepsilon = A = \oint E_{сп} dl$$

Связь между напряжением, Э.Д.С. источника и разностью потенциалов выражается как:

$$U = \Delta\varphi + \varepsilon$$

Сила и плотность тока

Силой тока называется скалярная физическая величина, равная отношению заряда dq, переносимого через поперечное сечение проводника за малый промежуток времени, к величине dt этого промежутка.

$$I = \frac{dq}{dt}$$

Электрический ток называется постоянным (постоянный электрический ток), если сила тока и его направление не уменьшаются с течением времени. Для постоянного тока

$$I = \frac{q}{t}.$$

Размерность силы тока [I]=А.

Направление электрического тока в различных точках сечения проводника и распределение силы тока по этому сечению определяется вектором плотности тока. Вектор плотности тока **j** направлен противоположно направлению движения электронов – носителей тока в проводниках и численно равен отношению силы тока dI сквозь малый элемент сечения, нормальный к направлению движения заряженных частиц к величине dS площади этого сечения.

$$j = \frac{dI}{dS}$$

В общем случае вектор плотности тока

$$\mathbf{j} = \frac{dI}{dS}\mathbf{n},$$

где **n** – единичный вектор плотности тока к поверхности dS сечения проводника.

Общая связь между элементами силы тока и вектором плотности тока

$$dI = \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS,$$

отсюда

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S j_n \cdot dS,$$

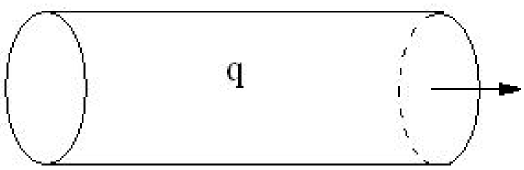
где $j_n = j \cdot \cos\alpha$ - проекция вектора **j** на направление нормали **n.**

Плотность постоянного тока одинакова по всему поперечному сечению S однородного проводника:

$$I = j \cdot S.$$

В цепи постоянного тока плотности тока в двух поперечных сечениях S_1 и S_2 обратно пропорциональны площади этих сечений

$$\frac{j_1}{j_2} = \frac{S_2}{S_1}.$$



Выразим вектор плотности тока через концентрацию свободных плотностей заряда и среднюю скорость их движения. Выделим некоторый объем

ΔS_n

$\Delta l = U\Delta t$

Рис.

проводника ΔV длинной Δl и площадью поперечного сечения ΔS_n (Рис.). Пусть q – заряд одной частицы, n_0 - концентрация заряженных частиц в выделенном объеме,U – средняя скорость направленного движения частиц. Найдем заряд Δq, проходящий через площадку ΔS_n за время Δt. Это будет заряд, заключенный в данном объеме:

$$\Delta q = q \cdot n_0 \cdot \Delta V = q \cdot n_0 U \cdot \Delta t \cdot \Delta S_n$$

Плотность тока

$$j = \frac{\Delta q}{\Delta S_n \cdot \Delta t} = \frac{q n_0 U \Delta t \cdot \Delta S_n}{\Delta S_n \cdot \Delta t} = q n_0 U$$

Или

$$\mathbf{j} = q n_0 \mathbf{U}$$

Вектор плотности тока совпадает с вектором средней скорости направленного движения положительно заряженных частиц.

Закон Ома в интегральной форме

Закон Ома устанавливает связь между силой тока и напряжением на данном участке цепи.

$$I = \frac{U}{R}$$

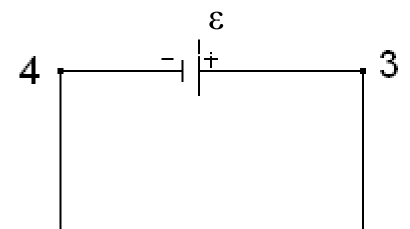


Рис.

Для неоднородного участка цепи, т.е. для участка цепи, содержащего источник тока (участок 3-4).

$$I = \frac{\int_1^2 E_{эл} dl + \int_1^2 E_{ст} dl}{R + r} = \frac{\Delta\varphi + \varepsilon}{R + r} \quad (1),$$

Здесь r – сопротивление источника тока.

Формула (1) представляет собой обобщенную форму закона Ома.

Для однородного участка цепи, т.е для участка цепи не содержащего источников тока (участок 1-2).

$$I = \frac{\int E_{эл} dl}{R} = \frac{\Delta\varphi}{R} = \frac{U}{R}$$

Закон Ома для замкнутой цепи:

$$I = \frac{\int_1^2 E_{cm} dl}{R + r} = \frac{\varepsilon}{R + r}$$

Сопротивление проводника не зависит ни от силы тока, ни от напряжения. Для однородных проводников постоянного поперечного сечения

$$R = \rho \frac{l}{S};$$

где l – длинна проводника, S – площадь поперечного сечения, ρ – удельное сопротивление проводника:

$$\rho = \frac{RS}{l}$$

Удельное сопротивление проводника зависит от природы проводника и от температуры:

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha t)$$

где: ρ_0 - удельное сопротивление проводника при 0° С, α – температурный коэффициент сопротивления, t – температура в градусах Цельсия.

Закон Джоуля – Ленца в интегральной форме

Опытным путем установлено, что при прохождении тока по проводнику в нем выделяется тепло. Количество теплоты, выделившееся в проводнике пропорционально квадрату силы тока, сопротивлению и времени:

$$\Delta Q = I^2 R \Delta t = \frac{U^2}{R} \Delta t = IU\Delta t$$

При прохождении тока движущиеся заряды испытывают сопротивление и силами поля, перемещающими заряд, совершается работа.

$$A = q\Delta\varphi = qU;$$

где $q = I \cdot \Delta t$. Эта работа численно равна количеству теплоты, выделявшейся в проводнике при прохождении по нему тока.

$$A = Q = I\Delta t \cdot U = I^2 R\Delta t$$

Закон Ома в дифференциальной форме

Рис.

Рассмотрим однородный участок проводника длинной dl и площадью поперечного сечения dS. (Рис.). Так как этот участок проводника не содержит источников тока, то закон Ома для этого участка можно записать в виде:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{d\varphi}{R}$$

где dφ – разность потенциалов на участке dl, R – сопротивление этого участка:

$$R = \rho \frac{dl}{dS}$$

Тогда

$$I = \frac{d\varphi}{\rho \frac{dl}{dS}} = \frac{d\varphi dS}{\rho dl} = \frac{1}{\rho} EdS = \gamma EdS$$

Здесь $\gamma = \frac{1}{\rho}$ - удельная проводимость. Отсюда получаем закон Ома в дифференциальной форме:

$$I = \gamma E \cdot dS$$

$$\mathbf{j} = \gamma \cdot \mathbf{E}$$

Если участок цепи содержит источники тока, то $\mathbf{E} = (\mathbf{E}_{\text{эл}} + \mathbf{E}_{\text{ст}})$ и обобщенный закон Ома:

$$I = \gamma(E_{эл} + E_{ст})dS$$

$$\mathbf{j} = \gamma(\mathbf{E}_{\text{эл}} + \mathbf{E}_{\text{ст}}).$$

Закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме

При протекании тока по однородному участку dl проводника площадью поперечного сечения dS выделяется за время dt количество теплоты

$$dQ = \frac{U^2}{R} dt$$

Учитывая, что сопротивление участка проводника

$$R = \rho \frac{dl}{dS}$$

И напряжение U=dφ, получим

$$dQ = \frac{(d\varphi)^2 dS \cdot dt \cdot dl}{\rho \cdot dl \cdot dl} = \frac{1}{\rho} E^2 dS \cdot dl \cdot dt = \gamma E^2 dV dt$$

Здесь dV – объем участка проводника, γ – удельная проводимость.

Следовательно:

$$dQ = \gamma E^2 dSdldt$$

Учитывая, что $E = \frac{j}{\gamma}$, получим:

$$dQ = \gamma \frac{j^2}{\gamma^2} dldSdt = \rho \cdot j^2 dldSdt$$

За единицу времени в единице объема проводника выделяется количество теплоты

$$Q = \gamma E^2 = \rho j^2$$

Для переменного тока количество теплоты можно посчитать следующим образом

$$Q = \int_t \int_V \rho j^2 dldSdt$$

Правила Кирхгофа

Расчет сложных (разветвленных) цепей состоит в отыскивании токов в различных участках таких цепей по заданным сопротивлениям участков цепи и приложенным к ним Э.Д.С.

Расчет разветвленных цепей значительно упрощается, если пользоваться правилами Кирхгофа.

Первое правило относится к узлам цепи. Узлом называется точка, в которой сходится более чем два проводника. Ток, текущий к узлу, считается положительным, ток, текущий от узла – отрицательным.

Первое правило Кирхгофа (правило узлов): алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю.

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0,$$

где n – число проводников, сходящихся в узле.

Второе правило относится к любому выделенному в разветвленной цепи замкнутому контуру.

Второе правило Кирхгофа (правило контуров): в любом замкнутом контуре, произвольно выбранном в разветвленной цепи проводников, алгебраическая сумма произведений сил токов на сопротивления соответствующих участков цепи, равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в этом контуре.

$$\sum_{i=1}^{n} I_i \cdot R = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i$$

Для применения второго правила Кирхгофа выбирается определенное направление обхода контура (по часовой стрелке или против часовой стрелки). Положительными считаются токи, направления которых совпадают с направлением обхода контура, отрицательными считаются токи, направление которых противоположно направлению обхода контура.

ЭДС источников тока считаются положительными, если они создают токи, направления которых совпадают с направлением обхода контура, в противном случае ЭДС источников тока считаются отрицательными.

Основные положения классической теории проводимости металлов. (теория Друде – Лоренца)

1) Высокая электропроводность металлов обусловлена наличием в металлах электронов проводимости (свободных электронов). У металлов валентные электроны слабо связаны с ядрами в атомах и поэтому легко отрываются от атомов. При этом образуется свободный электрон и положительный ион. Таким образом, металл можно представить как кристаллическую решетку, в узлах которой находятся положительные ионы, колеблющиеся около положения равновесия. Пространство между ними заполнено электронами проводимости с концентрацией n ~ 10^{22} – 10^{23} см$^{-3}$.

2) Свободные электроны в металле ведут себя как идеальный газ, для которого можно применить основные законы молекулярно – кинетической теории газов:

- Закон Больцмана;
- Закон Максвелла;
- Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы.

3) Учитывается только взаимодействие электронов проводимости с положительными ионами кристаллической решетки по типу абсолютно упругого удара, взаимодействие электронов друг с другом не учитывают.

4) От соударения до соударения электроны проходят расстояние, которое называется длиной свободного пробега (λ_{cp}).

5) Кинетическая энергия теплового движения электронов

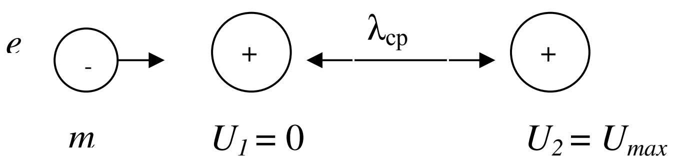
$$\frac{mV_T^2}{2} = \frac{3}{2}kT$$

Согласно классической электронной теории при создании электрического поля в проводнике электроны приобретают скорость направленного движения. При соударении с положительными ионами они теряют скорость направленного движения, и поэтому требуется дополнительная работа по приобретению скорости направленного движения, что и является причиной сопротивления металлов.

Вывод закона Ома из электронной теории проводимости

При направленном движении электрона внутри кристаллической решетки он испытывает соударения с положительными ионами, находящимися в узлах кристаллической решетки.

При соударении с положительным ионом электрон полностью теряет свою скорость направленного движения. При столкновении со вторым положительным ионом – скорость электрона максимальна (Рис.).



Следовательно, средняя скорость направленного движения:

$$U_{cp} = \frac{U_1 + U_2}{2} = \frac{U_{\max}}{2}$$

Воспользуемся формулой для плотности тока:

$$j = en_0 U_{cp}, \qquad (1)$$

где: $U_{cp} = a\tau$, a - ускорение, которое приобретает электрон под действием электрического поля, τ - время прохождения средней длины свободного пробега λ_{cp}.

Со стороны электрического поля на электрон действует сила $\mathbf{F} = e\mathbf{E}$ и под действием этой силы, согласно второму закону Ньютона $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ электрон приобретает ускорение:

$$e\mathbf{E} = m\mathbf{a},$$

или в скалярном виде

$$eE = ma.$$

Отсюда ускорение электрона

$$a = \frac{eE}{m}.$$

Найдем τ :

$$\tau = \frac{\lambda_{cp}}{V_T + U} = \frac{\lambda_{cp}}{V_T}, \text{ т.к. } \quad V_T >> U$$

$$U_{\max} = a\tau \qquad\qquad U_{cp} = \frac{U_{\max}}{2} = \frac{1}{2}a\tau = \frac{1}{2}\frac{eE}{m}\cdot\frac{\lambda_{cp}}{V_T}$$

Подставим полученные выражения для U_{cp} в формулу (1):

$$j = en_0 \frac{e\lambda_{cp}}{2mV_T}E = \frac{e^2 n_0 \lambda_{cp}}{2mV_T}E \quad (2)$$

Сравним (2) с $j = \gamma E$. Отсюда удельная проводимость

$$\gamma = \frac{e^2 n_0 \lambda_{cp}}{2mV_T}$$

и удельное сопротивление

$$\rho = \frac{1}{\gamma} = \frac{2mV_T}{e^2 n_0 \lambda_{cp}}$$

Удельное сопротивление и удельная проводимость зависят от природы металла. Это определяется концентрацией и λ_{cp}, которая зависит от типа кристаллической решетки и от температуры.

Для идеального газа:

$$V_T = \sqrt{\frac{3kT}{\pi T}}.$$

Следовательно, удельное сопротивление металлов пропорционально корню квадратному из абсолютной температуры $\rho \sim \sqrt{T}$

Вывод закона Джоуля – Ленца из электронной теории

При движении электроны приобретают энергию, обусловленную направленным движением, т.е. энергию, которая в конце свободного пробега равна:

$$E_к = \frac{mU_{\max}^2}{2}$$

Эта энергия при столкновении с ионом кристаллической решетки в соответствии с законом сохранения энергии превращается в тепло и проводники нагреваются.

Количество теплоты, выделяемое в единицу времени в единице объема проводника:

$$Q = E_к \cdot n_0 \nu$$

где ν - число столкновений каждого электрона в единицу времени.

Кинетическая энергия направленного движения электрона

$$E_к = \frac{mU_{\max}^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\frac{eE\lambda_{ср}}{mV_T}\right)^2 = \frac{e^2E^2\lambda_{ср}^2}{2mV_T^2}$$

Число столкновений в единицу времени:

$$\nu = \frac{1}{\tau} = \frac{V_T}{\lambda_{ср}}$$

Следовательно количество теплоты, выделенное в единицу объема проводника:

$$Q = n_0 \frac{e^2E^2\lambda_{ср}^2}{2mV_m^2} \cdot \frac{V_T}{\lambda_{ср}} = \frac{n_0 e^2 \lambda_{ср}}{2mV_T} E^2$$

Закон Джоуля – Ленца из электронной теории проводимости.

$$Q = \frac{n_0 e^2 \lambda_{ср}}{2mV_T} E^2$$

Закон Видемана – Франца

Металлы обладают не только хорошей электропроводностью, но и хорошей теплопроводностью. Закон Видемана – Франца устанавливает связь между коэффициентом теплопроводности и удельной проводимостью

$$\frac{æ}{\gamma} = \alpha T$$

Для металлов отношение коэффициента теплопроводности æ к удельной проводимости γ не зависит от природы металла и изменяется пропорционально изменению абсолютной температуры. Получим выражение этого коэффициента пропорциональности.

Для электронного газа как для идеального:

$$æ = \frac{1}{2} n_0 k \lambda_{cp} V_T \qquad (1)$$

$$\gamma = \frac{1}{2} n_0 \frac{e^2 \lambda_{cp}}{m V_T} \qquad (2)$$

Поделим (1) на (2)

$$\frac{æ}{\gamma} = \frac{k m V_T^2}{e^2};$$

и учитывая, что

$$\frac{m V_T^2}{2} = \frac{3}{2} kT$$

получим закон Видемана – Франца.

$$\frac{æ}{\gamma} = \frac{3k^2}{e^2} T$$

где $\frac{3k^2}{e^2} = \alpha$ - коэффициент пропорциональности.

Трудности классической электронной теории

Некоторые положения классической электронной теории не совпадают с опытом.

1) Из опыта известно, удельное сопротивление пропорционально температуре, $\rho \sim T$; теория дает, что удельное сопротивление пропорционально корню квадратному из температуры $\rho \sim \sqrt{T}$.

2) Явление сверхпроводимости электронная теория не объясняет.

3) Из опыта известно, что молярная теплоемкость металлов $C_{мет} = 3R$. Такой же теплоемкостью обладают и диэлектрики, у которых нет свободных электронов. Таким образом, вклад в теплоемкость дают только ионы в узлах кристаллической решетки. Свободные электроны вклад в теплоемкость не дают. Однако из электронной теории следует:

$$C = C_{реш} + C_e \ ; \qquad C_{реш} = 3R$$

$$C_e = \tfrac{3}{2} R \ ; \qquad C_{мет} = 3R + \tfrac{3}{2} R = \tfrac{9}{2} R \ .$$

Ток в газах

Процесс прохождения тока через газ называют газовым разрядом. При обычных условиях газ является диэлектриком. Под действием внешних источников энергии (тепла, света) в газе появляются свободные заряды (ионы и электроны). Процесс образования свободных зарядов в газе под действием внешних источников энергии называют ионизацией газа. Одновременно с ионизацией протекает процесс рекомбинации, т.е. процесс образования нейтральных частиц. Если в ионизированном газе создать электрическое поле, то в нем возникает ток.

Вольт - амперная характеристика газового разряда

Исследовать вольтамперную характеристику газового разряда можно установке, схема которой приведена ниже на рис.

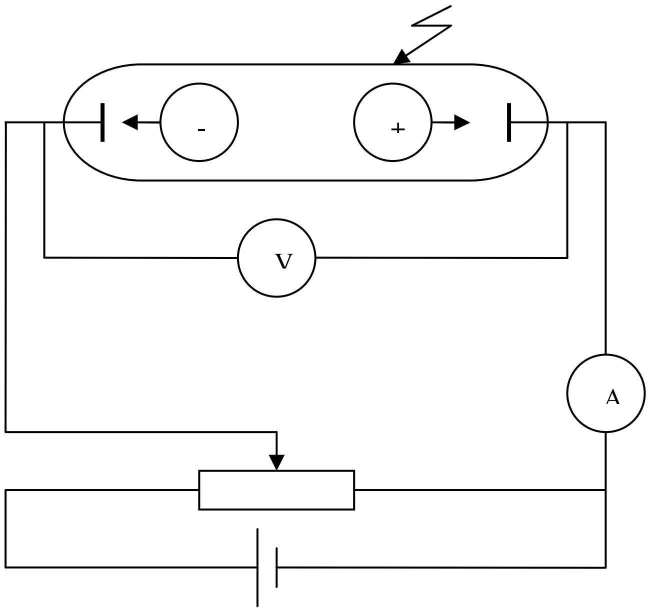


Рис.

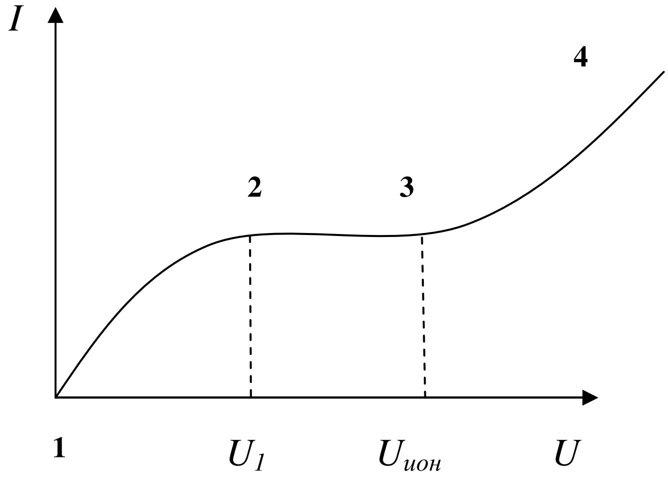


Рис.

На участке (1 – 2) – ток возрастает, т.к. с увеличением U возрастает число зарядов, достигающих электрода (рис.).

Участок (2 – 3) характеризуется током насыщения. Ток насыщения – это величина, которая определяется активностью ионизатора, т.е. числом пар ионов, образующихся в единицу времени в единице объема под действием данного ионизатора. Участок (3 – 4) возникает пробой – резкое возрастание силы тока.

При достижении $U = U_1$ все ионы и электроны, образующиеся в газе, достигают электродов следовательно I – постоянная величина. На участке 1 - 1' выполняется закон Ома.

$$j = j_+ + j_-$$

$$j_+ = q_+ n_{0+} U_{cp} \qquad U_{cp} = \mu \cdot E$$

где μ - подвижность частицы

$$j_- = q_- n_{0-} U_{cp} = q_- n_{0-} \mu_- E\,.$$

Считают, что $q^+ = q^- = e \quad n_0^+ = n_0^-$

$$j = j^+ + j^- = qn_0(\mu^+ + \mu^-)E = \gamma E$$

$\gamma = qn_0(\mu^+ + \mu^-)$ - удельная проводимость

Участок (2 – 3) характеризуется тока насыщения, плотность которого

$$j_{нас} = qn_0 d$$

Ток насыщения:

$$I_{нас} = j_{нас} \cdot S = qn_0 dS\,,$$

где d - расстояние между электронами, S - площадь сечения газоразрядного промежутка.

Работа выхода электронов из металла.
Термоэлектронная эмиссия

В металле при обычных условиях содержится большое количество свободных электронов. Они совершают беспорядочное тепловое движение и металл практически не покидают. Это указывает на то, что в приповерхностном слое металла существуют силы, препятствующие выходу электронов из металла. Работу, которую должен совершить электрон, чтобы выйти из металла в вакуум и удалиться в бесконечность (где действие сил равно нулю), называют работой выхода электрона из металла. Работа выхода зависит от природы металла и в сильной степени зависит от состояния поверхности. Нанося различные пленки на поверхность металла можно снижать, либо увеличивать работу выхода.

Причины, вызывающие работу выхода электронов

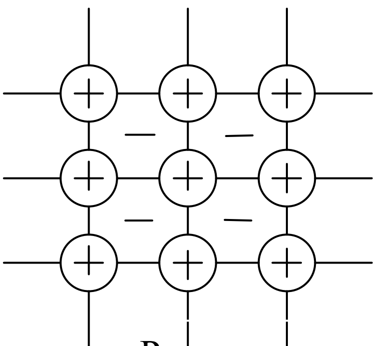


Рис.

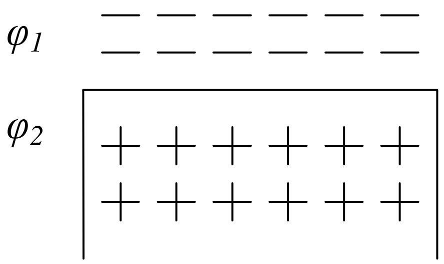


Рис.

В результате теплового движения электроны могут выходить из металла и при нормальных условиях, тем самым, создавая электронные облака в приповерхностных слоях. В результате на границе металл – вакуум образуется двойной электрический слой: положительно заряженная поверхность (φ_2) и электронное облако (φ_1). Наличие двойного электрического слоя означает, что существует поверхностный скачок потенциала ($\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$) и, следовательно, электрическое поле. Электрону, чтобы выйти из металла, необходимо совершить работу по преодолению этого скачка потенциала.

$$A = e\Delta\varphi$$

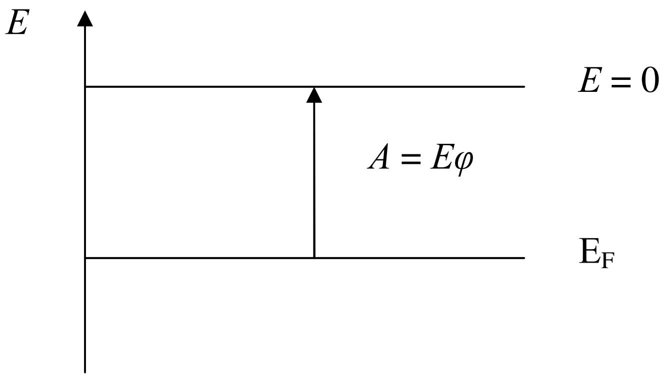


Рис.

Понятие электронной эмиссии.
Термоэлектронная эмиссия

Под действием внешних источников энергии: теплоты, изменений электрического поля, быстрых частиц, кинетическая энергия электронов в металле увеличивается, и за счет внешней энергии они могут совершать работу выхода. Поэтому под действием этих внешних источников энергии, число электронов, выходящих из металла, увеличивается. Для того чтобы электрон вышел из металла, кинетическая энергия теплового движения должна быть больше или равна работе выхода.

$$\frac{mV_T^2}{2} \geq A$$

Явление испускания поверхностью металла электронов называется электронной эмиссией. В зависимости от вида источников энергии, вызывающих эмиссию, различают: термоэлектронную эмиссию (процесс непускания электронов нагретыми поверхностями), фотоэлектронную эмиссию (процесс испускания электронов при облучении поверхности металла), автоэлектронную эмиссию (вырывание электронов с поверхности сильным электрическим полем), вторичную электронную эмиссию (испускание электронов при бомбардировке поверхности металла быстрыми частицами).

Использование электронной эмиссии в рентгеновских трубках и электронных лампах

Различают – двух - и многоэлектродные электронные лампы. Электронные лампы используются для выпрямления тока, усиления слабых сигналов, для получения незатухающих электромагнитных колебаний.

Рассмотрим работу двухэлектродной лампы (диода).

При повышении температуры катода, число электронов, выходящих из катода, увеличивается. Если между катодом и анодом нет электрического поля, то вышедшие электроны образуют вблизи катода отрицательный пространственный заряд (электронное облако). Очень незначительная часть электронов за счет своей кинетической энергии будет достигать анода, и в цепи появится очень слабый электрический ток. Для того чтобы иметь ток в цепи, необходимо создать разность потенциалов между катодом и анодом. Ток в цепи диода будет только в том случае, если положительный полюс батареи (Б) будет соединен с анодом (А), а отрицательный с катодом (К). При перемене полярности ток в цепи будет отсутствовать, т.е. диод обладает односторонней проводимостью. Это обстоятельство используют для выпрямления тока.

Вольт – амперная характеристика диода

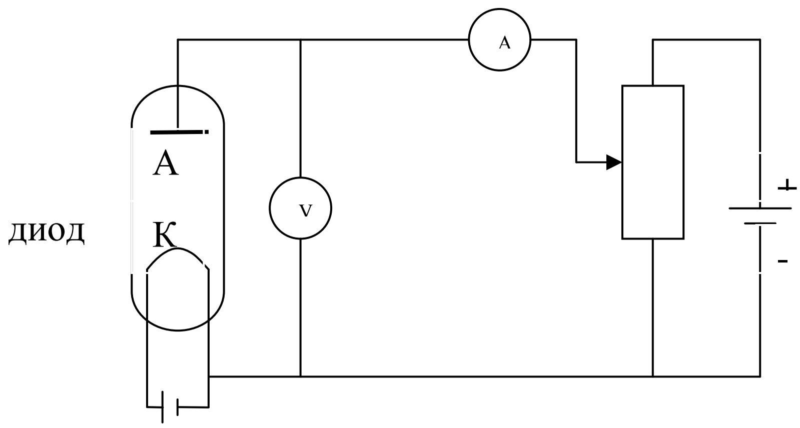


Рис.

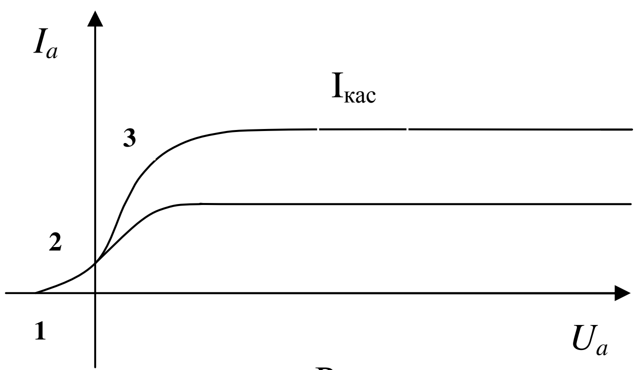


Рис.

Ток в лампе не подчиняется закону Ома. На участке 2 – 3 выполняется закон Богуславского – Ленгмюра (закон 3/2).

$$I_a = CU_a^{3/2}$$

Коэффициент С – величина, зависящая от формы, размеров и взаимного расположения электродов.

Зависимость тока насыщения от температуры.

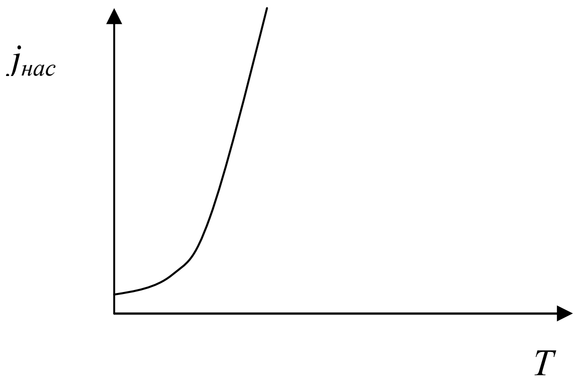
Формула Ричардсона – Дешмана.

Зависимость тока насыщения от температуры описывается формулой Ричардсона – Дешмана:

$$I_{нас} = BT^2 e^{-\frac{A}{kT}} S$$

где B – постоянная, T – температура катода, A – работа выхода, S – площадь катода, k – постоянная Больцмана.

$$j_{нас} = BT^2 \exp(-\frac{A}{kT})$$ - плотность тока насыщения.



Зависимость плотности тока насыщения от температуры катода.

Электрический ток в электролитах.
Законы электролиза Фарадея

Большая часть чистых жидкостей плохо проводит электрический ток, но растворы солей, кислот и щелочей в воде и других жидкостях хорошо проводят электрический ток. Прохождение тока через растворы солей и кислот сопровождается выделением составных частей этих веществ на электродах – явление электролиза. Такого рода проводники называются электролитами, а их проводимость - электрической проводимостью. Опытным путем Фарадей установил два закона электролиза.

Первый закон Фарадея. Масса вещества, выделившаяся на каком – либо из электродов, пропорциональна величине заряда, прошедшего через электролит:

$$m = Kq \qquad (1)$$

Здесь К – электрохимический эквивалент (равен массе данного вещества, выделяемой при электролизе зарядом в 1 Кл). Значения K приводятся в таблицах.

Второй закон Фарадея. Электрохимический эквивалент пропорционален химическому эквиваленту данного вещества.

$$K = C\frac{A}{Z} \qquad (2)$$

где A – относительная атомная масса, Z – валентность вещества, C – коэффициент пропорциональности

$$\frac{1}{C} = F = 96500\ \frac{Кл}{г-экв}$$ - число Фарадея

Грамм-эквивалент – количество вещества, масса которого в граммах равна химическому эквиваленту. Если через любой электролит проходит заряд, равный числу Фарадея, то на каждом из электродов выделяется 1 г – экв вещества. Сравнивая (1) с (2) имеем:

$$m = \frac{A}{Z}\cdot\frac{q}{F}$$

Явление электролиза показывает, что молекулы растворенного вещества в электролитах существуют в виде положительно и отрицательно заряженных ионов, которые под действием электрического поля движутся в противоположные стороны: положительные ионы – к катоду, а отрицательные – к аноду. Плотность тока, создаваемая дрейфом положительных ионов:

$$j_+ = n_+ e V_+$$

где n_+ - концентрация положительных ионов,

e - заряд иона,

V_+ - дрейфовая скорость положительных ионов.

Плотность тока, создаваемая дрейфом, отрицательных ионов:

$$j_- = n_- e V_-$$

где n_- - концентрация отрицательных ионов,

V_- - дрейфовая скорость отрицательных ионов.

Полная плотность тока, создаваемая дрейфом положительных и отрицательных ионов:

$$j = j_+ + j_- = n_+ eV_+ + n_- eV_-$$

Концентрации положительных и отрицательных ионов в электролитах равны. Следовательно:

$$n_+ = n_- = \alpha n ,$$

где n - число молекул в единице объема электролита

α - коэффициент диссоциации

$$V_+ = \mu_+ E \; ; \qquad V_- = \mu_- E$$

где μ_+- подвижность положительных ионов, μ_-- подвижность отрицательных ионов, E- напряженность электрического поля

Следовательно, плотность тока:

$$j = neE\,\alpha(\mu_+ + \mu_-)$$

Плотность тока пропорциональна напряженности электрического поля, следовательно, для электролитов тоже справедлив закон Ома. Удельная электропроводность электролитов:

$$\gamma = ne\,\alpha(\mu_+ + \mu_-) .$$

Электрические явления в контактах

При соприкосновении двух проводников электроны вследствие теплового движения переходят из одного проводника в другой. Если соприкасающиеся проводники различны или если температуры проводников различны, то оба потока диффузии электронов неодинаковы и один из проводников заряжается положительно, другой – отрицательно. Следовательно, внутри проводников и во внешнем пространстве между проводниками появляется электрическое поле, которое обуславливает ряд электрических явлений в контактах.

1. Контактная разность потенциалов.

Рассмотрим два проводника, находящихся в электрическом контакте.

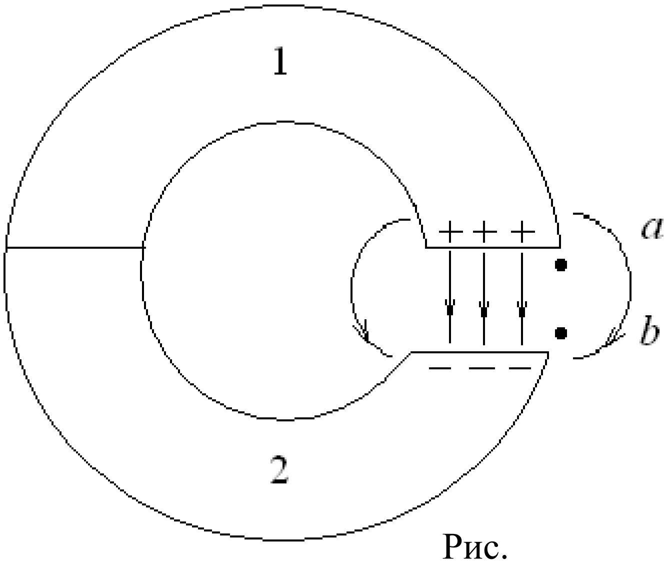


Рис.

Разность потенциалов между двумя любыми точками a и b, находящихся вне проводников, но расположенных в непосредственной близости от их поверхностей, называется внешней контактной разностью потенциалов или просто контактной разностью потенциалов. Так как цепь разомкнута, электрическое поле внутри проводника равно нулю и, следовательно, потенциал постоянен. Скачок потенциала может существовать только в тонких приповерхностных слоях проводник 1 – проводник 2.

Контактная разность потенциала U_{12} может быть найдена через термоэлектронные работы выхода (Φ_1 и Φ_2):

$$eU_{12} = \Phi_2 - \Phi_1$$

Первый закон Вольта – контактная разность потенциалов зависит от химического состава и температуры соприкасающихся металлов.

Второй закон Вольта - контактная разность потенциалов последовательно соединенных металлов равна контактной разности потенциалов крайних проводников.

2. Термоэлектричество.

Скачки потенциалов в т. В и С равны по величине и противоположны по знаку. Если слои 1-2 (т. В) и 2-1 (т. С) находятся при одинаковых температурах $(T_1 = T_2)$, показания вольтметра равны нулю.

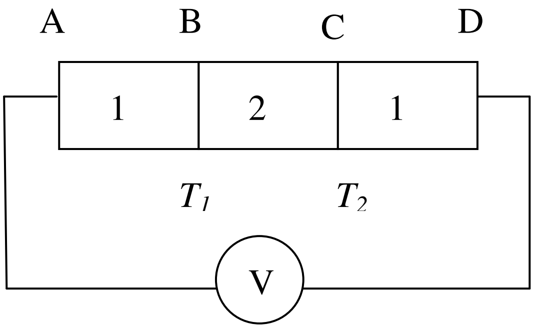


Рис.

Если $T_1 \neq T_2$, то в цепи появляется ЭДС, которое называется термо ЭДС (ТЭДС). Это явление открыто Зеебеком. Появление ТЭДС при разнице температур контактов для проводников обусловлено большей скоростью электронов у одного из контактов и появление диффузионного потока. У полупроводников с повышением температуры увеличивается концентрация и появляется дополнительный диффузионный поток.

$$\varepsilon = \alpha (T_2 - T_1)$$

2. Эффект Пельтье.

Опытным путем установлено, что кроме тепла Джоуля – Ленца, выделяемого при прохождении тока по проводнику, наблюдаются тепловые явлевния в контактах двух различных проводников, даже если они первоначально находятся при одинаковых температурах. В зависимости от направления тока происходит либо выделение тепла, либо поглощение, и контакт либо нагревается, либо охлаждается. Это и есть эффект Пельтье. Тепло Пельтье, выделяемое или поглощаемое в спае

$$Q_n = \Pi I \cdot t$$

П – коэффициент Пельтье.

Каждый электрон при своем движении переносит не только заряд, но и энергию. При наличии электрического тока в проводнике возникает поток энергии. При одной и той же плотности тока потоки энергии в разных проводниках различны. Следовательно, энергия к контакту в проводнике 1 не равна энергии, уходящей от контакта в проводнике 2. Разница и есть тепло Пельтье.

4. Эффект Томпсона.

В однородном проводнике, если этот проводник нагрет неравномерно, при прохождении по нему тока, происходит либо выделение, либо поглощение тепла. Выделение и поглощение тепла при прохождении тока по неравномерно нагретому проводнику тепло добавляется или вычитается из тепла Джоуля – Ленца. Это и есть эффект Томпсона. Знак эффекта Томпсона различен для различных проводников. Эффект Томпсона объясняется изменением свойств проводника при его нагревании. Однородный проводник при неравномерном нагревании становится неоднородным, и эффект Томпсона представляет собой своеобразный эффект Пельтье, с разницей, что неоднородность вызвана не различием химического состава. А различием температур. Тепло Томпсона можно рассчитать по формуле

$$Q_m = \sigma I t \Delta T$$

где σ - коэффициент Томпсона.

Термоэлектричество широко применяется для измерения температур (термопары). Маленькие термобатареи, составленные из тончайших полосок двух различных металлов, применяются для измерения интенсивности света (видимого и невидимого диапазонов). Термоэлектрические приемники в соединении с чувствительным гальванометром обладают огромной чувствительностью. Они обнаруживают невидимое тепловое излучение человеческой руки на расстоянии многих метров. Такое излучение вызывает разность температур спаев порядка одной миллионной доли градуса.

Термобатареи используются как маломощные генераторы электрического тока. Эффект Пельтье в контактах полупроводников используют для устройства термоэлектрических холодильников.

Электромагнетизм.

Магнитное поле тока

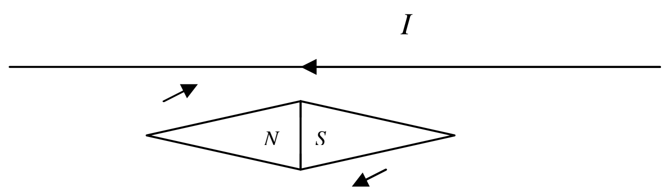


Рис.

При прохождении тока по проводнику на магнитную стрелку действуют силы, в результате чего она устанавливается определенным образом. Это указывает на то, что вокруг проводника с током есть силовое (магнитное) поле. Иоффе опытным путем доказал, что при движении электронов в вакууме существует так же магнитное поле. Было показано так же, что и вокруг движущихся заряженных макроскопических тел существует магнитное поле. Два проводника с током взаимодействуют друг с другом. Если токи текут в одном направлении, то проводники притягиваются, если в противоположных – отталкиваются. Вокруг каждого проводника с током существует магнитное поле, и эти поля взаимно действуют на проводники с током, а потому действуют на токи – закон Ампера, сила Ампера.

Источником магнитного поля являются токи, движущиеся заряды, не зависящие от природы тока.

Ампер высказал гипотезу, что и магнитные свойства вещества обусловлены элементарными токами или микротоками. Микротоки создаются движением электронов в атоме. Магнитное поле – это вид материи, которое существует вокруг токов и осуществляет взаимодействие между ними.

Магнитные величины и соотношения между ними

1) Вектор магнитной индукции $\mathbf{B}$ - силовая характеристика магнитного поля.

2) $\mathbf{H}$ - вектор напряженности магнитного поля, характеристика источника магнитного поля

$$\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H} \text{ - в вакууме (воздухе).}$$

μ_0 - магнитная постоянная

$$\mu_0 = 12{,}57 \cdot 10^{-7} \frac{Гн}{м}$$

в веществе - $B = \mu\mu_0 H$, μ - магнитная проницаемость среды $\mu = \dfrac{B}{B_0}$.

Графически магнитное поле изображается так же, как и электрическое поле, при помощи силовых линий, которые называются линиями магнитной индукции.

В отличие от электростатического поля, силовые линии магнитного поля всегда замкнуты.

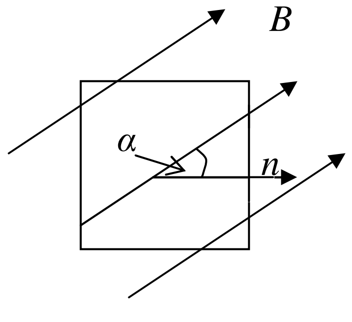
Поля, силовые линии которых – замкнутые кривые, называют вихревыми.

Магнитной силовой линией называют замкнутую кривую, касательные к которой в каждой точке совпадают с направлением вектора $\mathbf{B}$.

Поток вектора магнитной индукции

$$d\Phi = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n})dS = BdS\cos(\mathbf{Bn}) = BndS \qquad |\mathbf{n}| = 1$$

$$d\Phi = BndS$$



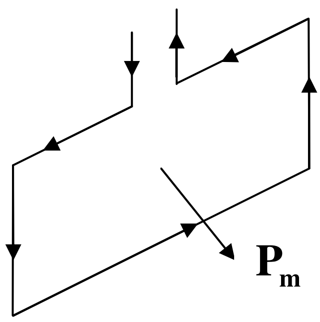
Магнитный поток определяет число силовых линий индукции, пронизывающих любую поверхность в направлении нормали к этой поверхности.

Для исследования свойств магнитного поля используют контур с током.

Контур характеризуется магнитным моментом $\mathbf{P_m}$.

$$\mathbf{P_m} = I \cdot S \cdot \mathbf{n}$$

$$P_m = I \cdot S$$



Магнитный момент – вектор, перпендикулярный площади рамки с током и направленный вдоль нормали. Ориентация вектора $\mathbf{P_m}$ определяется по правилу правого винта: вектор Р образует с направлением тока правовинтовую систему.

При внесении рамки с током в магнитное поле на нее действует механический вращающий момент.

$$\mathbf{M} = [\mathbf{P_m} \cdot \mathbf{B}]$$

$$|\mathbf{M}| = |\mathbf{P_m}| |\mathbf{B}| \cdot \sin(\widehat{\mathbf{P_m B}})$$

При $\mathbf{P_m} \parallel \mathbf{B}$ $\sin\alpha = 0 \Rightarrow \mathbf{M} = 0$ - состояние равновесия рамки с током в магнитном поле.

В состоянии равновесия направление вектора $\mathbf{P_m}$ и В совпадают. Это обстоятельство используется для определения направления $\mathbf{B}$ в любой точке магнитного поля.

При $\mathbf{P_m} \perp \mathbf{B}$ $\mathbf{M} - \max$

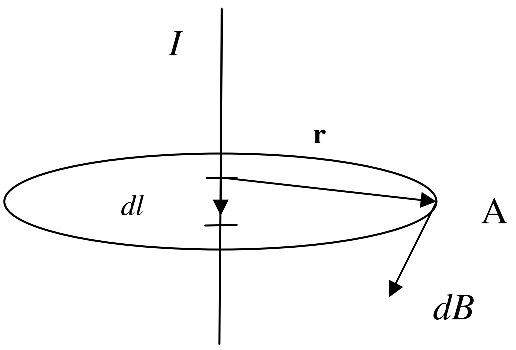
$$M_{\max} = P_m \cdot B \qquad B = \frac{M_{\max}}{P_m}$$

В - есть силовая характеристика механическому поля. Численно вектор магнитной индукции равен максимальному вращающемуся магнитному моменту, действующему на контур с током I = 1А, площадь которого S = 1м^2.

Закон Био-Савара-Лапласа

Закон Био-Савара-Лапласа определяет магнитную индукцию в любой точке магнитного поля, создаваемого постоянным электрическим током, текущим по проводнику любой формы.

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I[d\mathbf{l} \cdot \mathbf{r}]}{r^3}$$



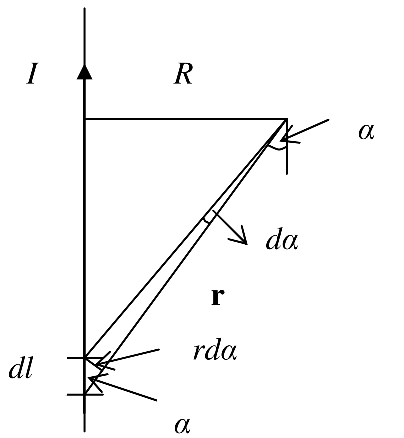
dl – вектор, направление которого совпадает с направлением тока в проводнике.

Экспериментально установлено, что магнитное поле, как и электрическое, подчиняется принципу суперпозиции. Поэтому магнитная индукция, создаваемая любым проводником с током, равна векторной сумме магнитных индукций, создаваемых отдельными элементами тока.

$$\mathbf{B} = \int d\mathbf{B}$$

Применение закона БСЛ к расчету магнитных полей от различных источников

1. Магнитное поле прямого бесконечно длинного проводника с тока.



$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \alpha}{r^2}$$

$$r = \frac{R}{\sin \alpha}$$

$$dl = \frac{rd\alpha}{\sin\alpha} = \frac{Rd\alpha}{\sin^2\alpha}$$

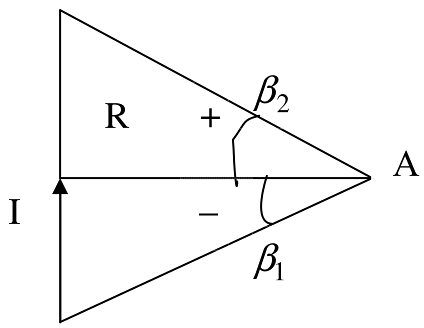
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR\,d\alpha\sin\alpha\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\sin\alpha\,d\alpha}{R}$$

По принципу суперпозиции:

$$B = \int dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R}\int_0^{\pi}\sin\alpha\,d\alpha = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R}\cos\alpha\Big|_0^{\pi} = \quad = \frac{2\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R}$$

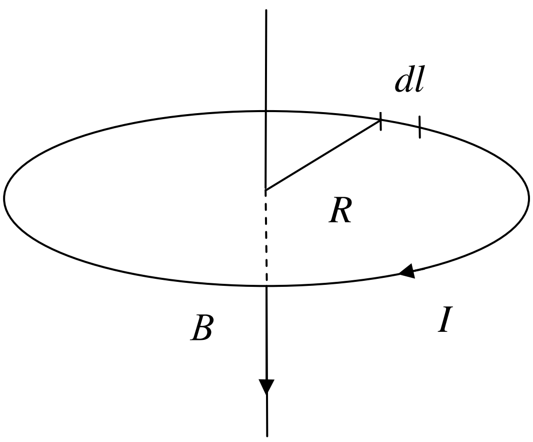
$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{R}$$

Поле прямолинейного проводника с током конечной длинны.



$$B_A = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}(\sin\beta_1 + \sin\beta_2)$$

2. **Магнитное поле в центре кругового тока.**



$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl\sin\alpha}{r^2}$$

$$r = R \quad R \perp dl \Rightarrow \sin\alpha = 1$$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl}{R^2}$$

$$B = \int_0^{2\pi R}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R^2}\cdot 2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2R}}$$

Магнитное поле движущегося заряда

Каждый проводник с током создает в окружающем пространстве магнитное поле. Электрический ток в любом проводнике есть движение заряженных частиц: в металлах – электроны; в электролитах – ионы; в газовом разряде – электроны и ионы. Следовательно, всякий движущийся заряд создает вокруг себя магнитное поле. Элемент с током Idl на расстоянии r создает магнитное поле напряженность, которого

$$dH = \frac{1}{4\pi}\frac{Idl\sin\alpha}{r^2}$$

и индукция

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\alpha}{r^2}$$

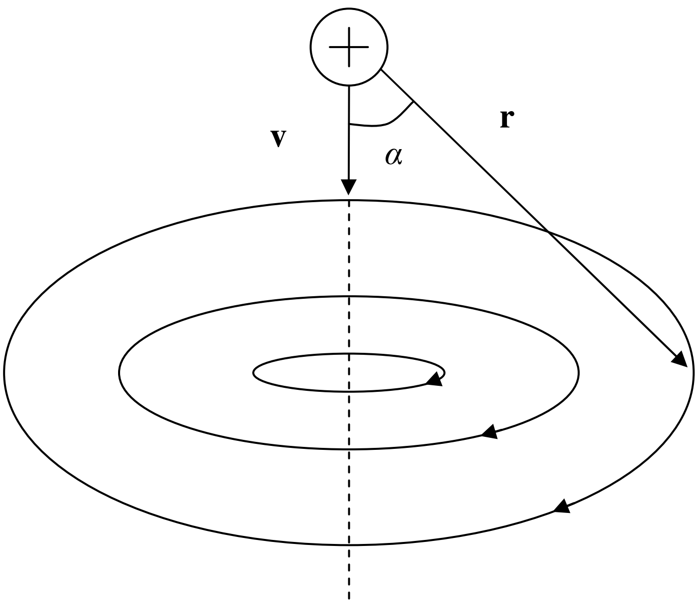
Выразим силу тока через плотность тока и плотность тока – через концентрацию заряженных частиц и их скорость:

$$Idl = jSdl = neV \cdot S \cdot dl$$

$n \cdot S \cdot dl = N$ - полное число частиц в отрезке провода dl

Следовательно:

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{N \cdot eV \cdot \sin\alpha}{r^2}$$



$$dH = \frac{1}{4\pi}\frac{NeV \cdot \sin\alpha}{r^2}$$

Отсюда: напряженность поля, создаваемая одной движущейся частицей:

$$H = \frac{1}{4\pi}\frac{e \cdot V \cdot \sin\alpha}{r^2}$$

$$B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{e \cdot V \cdot \sin\alpha}{r^2}$$

Направление индукции

этого поля определяется по правилу правого винта (или буравчика).

Для вектора индукции имеем:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{e[\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}]}{r^3}$$

Для напряженности:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi}\frac{e[\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}]}{r^3}$$

Следовательно движущийся заряд эквивалентен элементу с током

$$I\cdot d\mathbf{l} = e\mathbf{v}$$

Циркуляция вектора магнитной индукции.

Законы полного тока.

Циркуляция вектора магнитной индукции.

$$\oint_l Bdl = \oint_l Bdl\cos(\widehat{B\cdot dl})$$

Циркуляция вектора напряженности магнитного поля

$$\oint \mathbf{H}\,d\mathbf{l} = \oint H\,dl\cos\alpha$$

Рассчитаем циркуляцию вектора магнитной индукции, если источником магнитного поля является прямой проводник с током бесконечной длины.

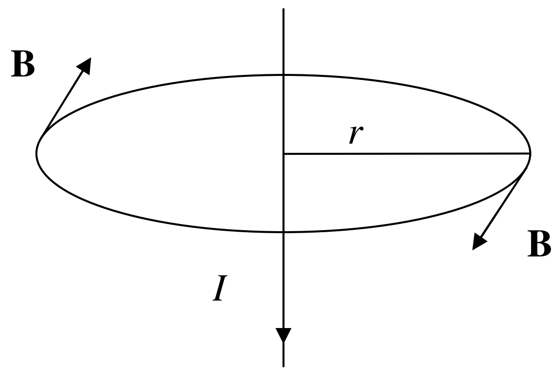


Рис.

$$\oint B\,dl\cos\alpha = B\oint_l dl$$

Так как все токи этого контура находятся на одинаковом расстоянии от проводника с током, то для них величина **B** во всех точках одинакова, и так как **B** || dl, то $\cos\alpha = 1$.

Для бесконечно длинного прямого тока

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \quad \Rightarrow \quad B\oint_l dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \cdot 2\pi R = \mu_0 I$$

(1) $\oint_l Bdl = \mu_0 \sum I$ - закон полного тока.

Циркуляция вектора магнитной индукции по замкнутому контуру l пропорциональна алгебраической сумме токов, охватываемых этим контуром.

Уравнение (1) справедливо для любых проводников с током.

Циркуляция вектора напряженности магнитного поля:

$$\oint_l Hdl = \sum I$$

Применение закона полного тока к расчету магнитного поля соленоида.

Считаем, что магнитное поле соленоида сосредоточено внутри него.

Вдали от краев соленоида внутри катушки поле можно считать однородным. Выберем замкнутый контур (1,2,3,4,1).

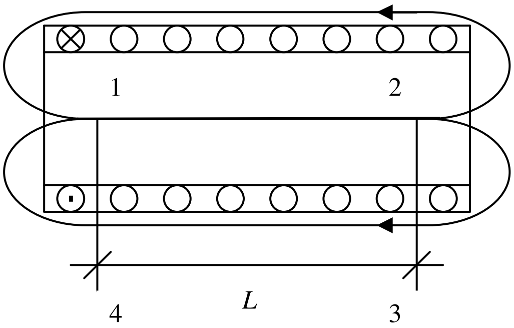


Рис.

Интеграл по замкнутому контуру (1,2,3,4,1) можно разбить на сумму интегралов по отдельным участкам контура.

$$\oint_{1,2,3,4} \mathbf{B}d\mathbf{l} = \int_1^2 \mathbf{B}d\mathbf{l} + \int_2^3 \mathbf{B}d\mathbf{l} + \int_3^4 \mathbf{B}d\mathbf{l} + \int_4^1 \mathbf{B}d\mathbf{l}$$

Поскольку магнитное поле все сосредоточено внутри соленоида, то $\int_3^4 \mathbf{B}d\mathbf{l} = 0$. На участке контура (4,1) и (2,3) вектор **B** перпендикулярен вектору d**l**, следовательно $\int_4^1 \mathbf{B}d\mathbf{l} = 0$ и $\int_2^3 \mathbf{B}d\mathbf{l} = 0$.

Тогда $\int\limits_{1,2,3,4,1} \mathbf{B}d\mathbf{l} = \int\limits_{1}^{2} \mathbf{B}d\mathbf{l} = B \cdot L$

С другой стороны

$$\oint \mathbf{B}d\mathbf{l} = \mu_0 IN$$

Следовательно, имеем

$$B \cdot L = \mu_0 IN$$

$$(2) \quad B = \frac{\mu_0 I \cdot N}{L} = \mu_0 In\,, \quad n = \frac{N}{L}$$

где число витков на единицу длины соленоида

напряженность поля внутри соленоида:

$$(3) \quad H = \frac{I \cdot N}{L} = I \cdot n$$

Формула (2) и формула (3) справедливы для случая $d << L$ – бесконечно длинный соленоид. Эти формулы справедливы и для расчета магнитной индукции тороида на его оси.

Действие магнитного поля на токи.
Закон Ампера.

Сила, с которой магнитное поле действует на токи, называется силой Ампера.

$d\mathbf{F} = I[d\mathbf{l}\,\mathbf{B}]$ - сила, действующая на элемент тока $Id\mathbf{l}$, находящимся в магнитном поле напряженностью $\mathbf{B}$.

Для прямого тока $\mathbf{F} = I[\mathbf{l}\,\mathbf{B}]$.

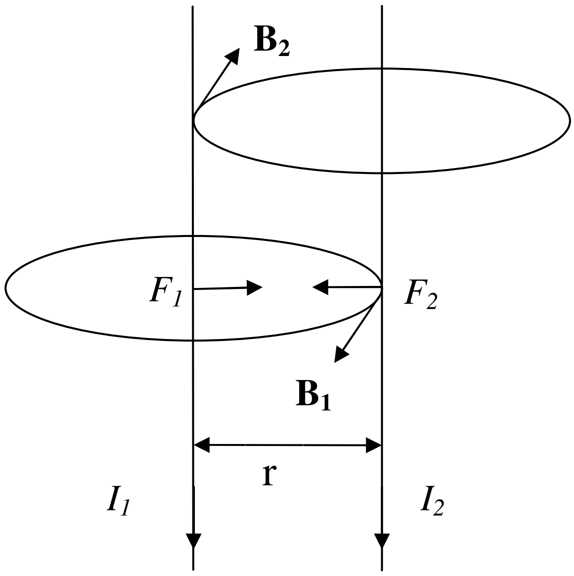
Направление силы Ампера – по правилу левой руки.

$$dF = Idl\,B \cdot \sin(d\mathbf{l}\,\mathbf{B})\,.$$

$$F = I \cdot l \cdot B \sin\alpha\,.$$

Магнитное взаимодействие прямых токов

Для нахождения сил взаимодействия между двумя прямыми проводниками с током нужно знать магнитную индукцию, создаваемую одним током в месте расположения другого по величине и по направлению.



Пусть **F₁** – сила Ампера, действующая со стороны магнитного поля тока I_2 на ток I_1, **F₂** – сила Ампера, действующая со стороны магнитного поля тока I_1 на ток I_2.

$$F_1 = I_1 l\, B_2\,; \qquad F_2 = I_2 l\, B_1$$

Для бесконечно длинного провода.

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\,; \qquad B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r} \ -$$

Следовательно: $$F_1 = I_1 l \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 \cdot I_2}{r} l$$

$$F_2 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 \cdot I_2}{r} l$$

$$F_1 = F_2 = \frac{\mu_0 I_i I_2}{2\pi r}\cdot l\,.$$

Если $l = 1$, то сила, действующая на единицу длины проводника:

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 \cdot I_2}{r} \text{ – закон Ампера.}$$

Действие магнитного поля на движущийся в нем заряд. Сила Лоренца

Так как ток есть направленное движение зарядов, а Ампер установил, что магнитное поле действует на токи, следовательно, магнитное поле должно действовать на отдельные заряды, движущиеся в нем. Для получения выражения для силы Лоренца воспользуемся выражением для силы Ампера.

$$d\mathbf{F} = I[d\mathbf{l} \cdot \mathbf{B}]$$

Учитывая, что

$$I \cdot dl = \mathbf{j}Sdl = qn_0\mathbf{V} \cdot \overbrace{Sdl}^{dV} = qn_0\mathbf{V}dV = qN\mathbf{V}$$

и $$N = n_0 dV$$

получим:

$$d\mathbf{F} = qN[\mathbf{V} \cdot \mathbf{B}]$$

сила, действующая на одну частицу:

$$\mathbf{F} = q[\mathbf{V} \cdot \mathbf{B}]$$

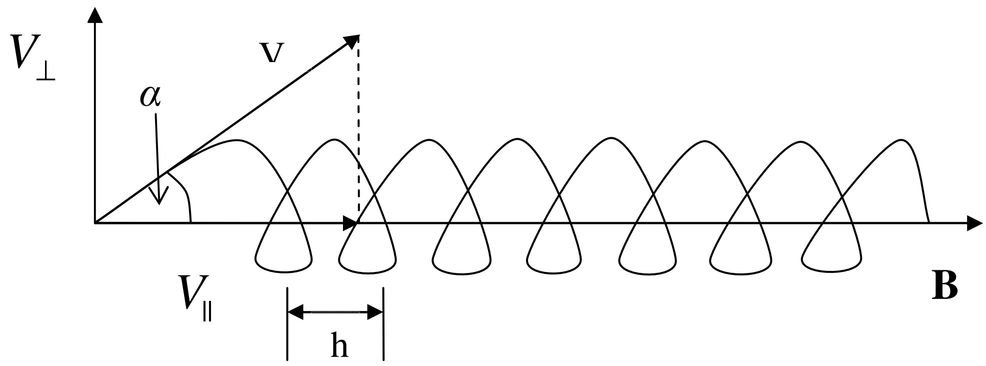
представляет собой силу Лоренца.

В скалярном виде:

$$F = qV \cdot B \cdot \sin\alpha\,, \qquad \alpha = \widehat{\mathbf{V}\mathbf{B}}$$

Так как сила Лоренца перпендикулярна скорости перемещения, то сила Лоренца не совершает работы. Она изменяет скорость движущейся заряженной частицы только по направлению, создавая тем самым нормальное ускорение. Если в магнитное поле попадает положительно заряженная частица под углом к направлению магнитных силовых линий α = 90° (т.е. $\mathbf{V} \perp \mathbf{B}$), то она будет двигаться по окружности, плоскость которой перпендикулярна вектору **B**, а направление вращения определяется по правилу правого винта и зависит от знака заряженной частицы.

Если частица попадает в магнитное поле под углом α к направлению вектора **B**, то она будет участвовать в двух движениях: поступательном $V_{\parallel} = V \cdot \cos\alpha$ и вращательном $V_{\perp} = V \cdot \sin\alpha$.



Результирующее движение будет представлять собой спираль.

Найдем радиус витка спирали:

$$F_л = \frac{mV_\perp^2}{R}; \qquad F_л = qVB\sin\alpha = qV_\perp B\ .$$

$$qV_\perp B = \frac{mV_\perp^2}{R}; \qquad R = \frac{mV_\perp}{qB} = \frac{mV\sin\alpha}{qB} \quad (4).$$

Из (4) видно, что с увеличением **B** уменьшается *R*. Это обстоятельство используют для фокусировки пучка заряженных частиц в электронных микроскопах.

Шаг витка спирали найдем из условия:

$$h = V_\parallel \cdot T = V \cdot \cos\alpha \cdot T\ .$$

Период обращения:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi R}{V} = \frac{2\pi m}{qB}$$

Следовательно, шаг витка спирали:

$$h = \frac{2\pi V \cdot m\cos\alpha}{qB}\ .$$

Если имеется еще и электрическое поле, то полная сила, действующая на заряженную частицу при движении в электрическом и магнитном полях, -

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} + e[\mathbf{V}\cdot\mathbf{B}]\ .$$

Сила Лоренца проявляется при движении электронов и ионов в магнитных полях. Свойства магнитного поля изменять направление движения заряженных частиц используют в циклических ускорителях.

Ускорители – установки, служащие для ускорения заряженных частиц до высоких энергий.

Различают ускорители непрерывные и импульсные, линейные, циклические, индукционные.

1. Линейный ускоритель (**E**=const, W~10МэВ)
2. Линейный резонансный (переменное СВЧ электрическое поле: $W_{пр}$~10МэВ, $W_{эл}$~10ГэВ).
3. Циклотрон – циклический резонансный ускоритель тяжелых частиц (протонов, нейтронов). $W_{пр}$~20МэВ. Условие резонанса $T_E = T_{вр}$
4. Фазотрон – циклический резонансный ускоритель заряженных частиц. **B**=const. $T_E = T_{вр}$. W~1ГэВ
5. Синхротрон – циклический резонансный ускоритель ультрарелятивистских электронов. W_e~10ГэВ.
6. Синхрофазотрон – циклический резонансный ускоритель тяжелых частиц ($W_{пр}$~500ГэВ).
7. Бетатрон – циклический индукционный ускоритель электронов, который ускоряет электроны вихревым электрическим полем. Электрическое поле порождается вихревым магнитным полем, удерживающем электроны на орбите. $W_э$~100МэВ.

Эффект Холла.

Эффект Холла возникает в металлах и полупроводниках с током при внесении их в магнитное поле ($B \perp I$) и состоит в следующем. Если перпендикулярно пластине высотой b и шириной a, по которой течет I,возбудить магнитное поле **B,** на гранях пластины высотой b возникает

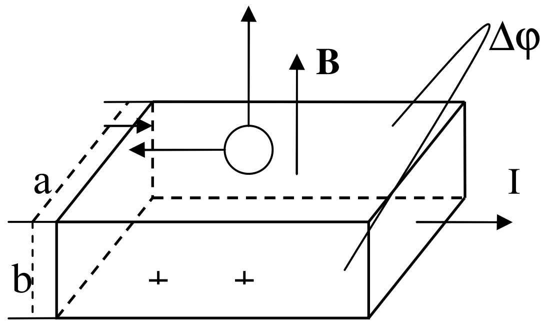


Рис.

разность потенциалов Δφ, которая называется холловской разностью потенциалов. Объявление эффекта Холла следующее. На свободные заряды в пластине металла или полупроводника, движущееся в процессе переноса тока действует $\mathbf{F}_{\text{л}}$. В результате чего внутри этой пластины произойдет перераспределение заряда и, следовательно, возникает разность потенциалов. Такое перераспределение зарядов будет происходить до тех пор, пока сила, действующая со стороны электрического поля, возникающая в результате перераспределения зарядов, не уравновесится силой Лоренца. В состоянии равновесия:

$$F_{эл} = F_л$$

$$F_{эл} = qE = q\frac{\Delta\varphi}{a};$$

$F_л = qvB$, т.к. $(\mathbf{v} \perp \mathbf{B})$, то $\sin\alpha = 1$

Выразим скорость:

$$I = jS = j \cdot a \cdot b = qn_0vab$$

$$v = \frac{I}{qn_0ab}$$

Тогда $$F_л = qB \cdot \frac{I}{qn_0ab} = \frac{I \cdot B}{n_0ab}$$

$$q\frac{\Delta\varphi}{a} = \frac{I \cdot B}{n_0ab};$$

$$q\Delta\varphi = \frac{I \cdot B}{n_0b}$$

Отсюда $$\Delta\varphi = \frac{1}{qn_0} \cdot \frac{I \cdot B}{b}$$

Обозначим $\dfrac{1}{qn_0}$ = R – постоянная Холла (зависит от типа вещества. Позволяет определить тип заряда, их концентрацию и подвижность, что особенно важно для полупроводников.)

Работа при перемещении проводника и контура с током в магнитном поле.

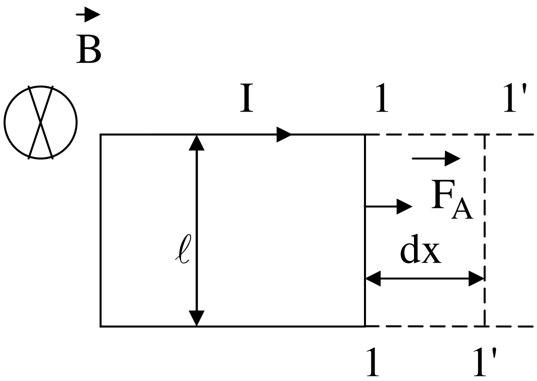


Рис.

Проводник 1-1 имеет скользящий контакт и может свободно перемещаться. Под действием силы Ампера он переместился на расстояние dx и займет положение 1'-1'. При этом ила Ампера совершит работу

$$dA = F_A \cdot dx$$

Сила Ампера, действующая на прямой проводник с током

$$F_A = I \cdot l \cdot B$$

$$dA = I \cdot B \cdot l \cdot dx$$

Учитывая, что ldx - площадь контура, описанная движущимся проводником с током, имеем

$$dA = I \cdot B \cdot dS\,.$$

$$B \cdot dS = d\Phi\,,$$

где dΦ – магнитный поток через контур площадью dS.

Следовательно

$$dA = I \cdot d\Phi$$

$$A = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} I d\Phi = I(\Phi_2 - \Phi_1) = I \cdot \Delta\Phi$$

Здесь, $\Delta\Phi$ - изменение магнитного потока, пронизывающего площадь, ограниченную контуром.

Теорема Остроградского-Гаусса для потока магнитной индукции.

Теорема Остроградского-Гаусса определяет поток вектора магнитной индукции , пронизывающего замкнутую поверхность, охватывающую токи. Т.к. магнитные силовые линии – замкнутые кривые, то сколько линий войдет в $\forall$ замкнутую поверхность, столько и выйдет, и, следовательно, алгебраическая сумма потоков будет равна нулю.

$$\Phi = \oint_S (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) dS = \oint_S B \cdot dS \cdot \cos(\mathbf{B} \hat{\cdot} \mathbf{n}) = \oint_S B_n dS$$

$$\Phi = \oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_S B_n dS = 0$$

Поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю – теорема Остроградского-Гаусса признак вихревого поля.
Равенство нулю вектора магнитной индукции через замкнутую поверхность является признаком вихревого поля.

Явление электромагнитной индукции.

Явление электромагнитной индукции, открытую Фарадеем, состоит в том, что если замкнутый контур пересекается переменным во времени магнитным потоком , то в этом контуре возникает электрический ток. Такой ток называется индукционным, а возникающая при этом ЭДС – ЭДС индукции.

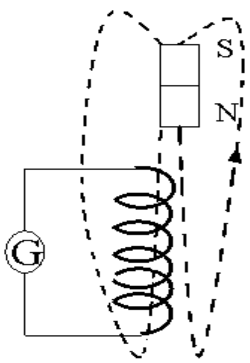


Рис.

При ведении и выведении магнита гальванометр будет показывать ток. Если взять маленькую катушку и перемещать её относительно большой катушки (или менять в ней силу тока), то в большой катушке тоже будет появляться электрический ток. Причем сила тока в большой катушке будет зависеть от скорости изменения тока в малой катушке. Направление тока в большой катушке при возрастании тока одно, а при уменьшении - противоположное. Направление индукционного тока определяется по закону (правилу) Ленца:

Индукционный ток во всех случаях направлен таким образом, что его действие противоположно действию причины, вызвавшей этот ток. Или, Индукционный ток всегда направлен так, что его магнитный поток задерживает изменение магнитного потока, вызвавшего этот ток.

Основной закон электромагнитной индукции.

Максвелл вывел основной закон электромагнитной индукции:

$$\varepsilon = -f\,\frac{d\Phi}{dt}$$

f – коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора системы единиц. Если выбрать систему единиц, в которой f=1, то

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Здесь знак «-» соответствует правилу Ленца, $\frac{d\Phi}{dt}$ - скорость изменения магнитного потока, пронизывающего площадь, ограниченную контуром.

Рассмотрим некоторые применения этого закона.

Пример 1. Прямолинейный проводник движется параллельно самому себе в магнитном поле. Найдем ЭДС возникающую в проводнике. За время t при скорости v проводник опишет площадь dS.

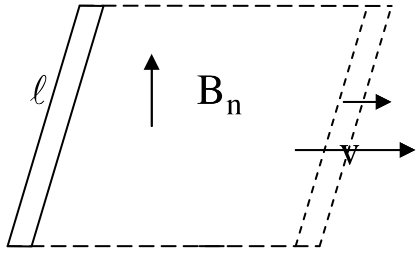


Рис.

Следовательно,

$$dS = l \cdot v \cdot dt$$

Изменение магнитного потока через контур:

$$d\Phi = B_n dS = B_n l \cdot v \cdot dt$$

Отсюда величина ЭДС:

$$\varepsilon = \frac{d\Phi}{dt} = B_n l \cdot v$$

Пример 2. В магнитном поле находится замкнуты проволочный контур, пронизываемый поком магнитной индукции Ф. Пусть этот поток уменьшится до нуля. Найти величину заряда, прошедшего по контуру.

Согласно закону Ома

$$\mathrm{I} = -\frac{1}{\mathrm{R}} \cdot \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{dt}}$$

R – полное сопротивление контура.

Величина прошедшего заряда:

$$q = \int Idt = -\frac{1}{R}\int_{\Phi_1}^{\phi_2} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\Delta\Phi}{R}$$

Полученная формула лежит в основе удобного способа измерения магнитной индукции. Для этого служит прибор, называемый флюксметром. Он состоит из небольшой плоской проволочной катушки, соединенный с гальванометром.

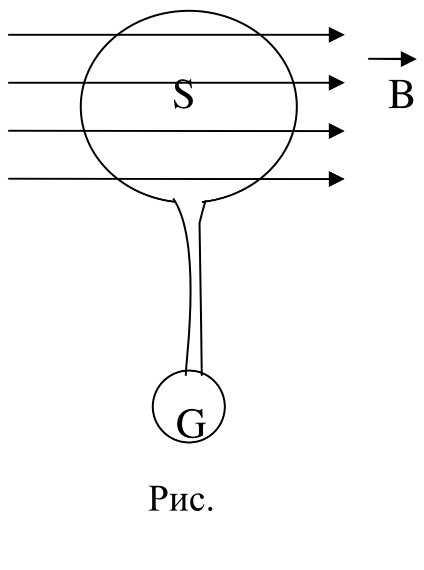


Рис.

При измерениях катушку флюксметра располагают перпендикулярно к линиям магнитной индукции. Магнитный поток через катушку $\Phi = \mathrm{B} \cdot \mathrm{nS}$.

Потом магнитный поток через катушку уменьшают до нуля. При этом по цепи пройдет заряд:

$$\mathrm{q} = \frac{\Phi}{\mathrm{R}} = \frac{\mathrm{S} \cdot \mathrm{n}}{\mathrm{R}}\mathrm{B} = \alpha\mathrm{B}$$

Измеряя заряд q баллистическим гальванометром и зная постоянную гальванометра α, определяют магнитную индукцию.

Объяснение возникновения ЭДС индукции из электронной теории.

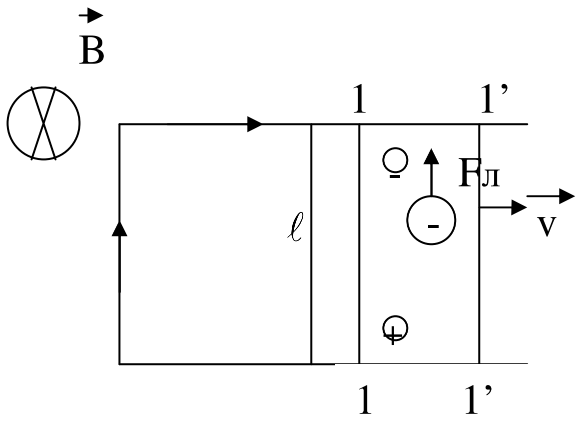


Рис.

Будем перемещать проводник 1-1 относительно магнитного поля со скоростью **v.** С такой же скоростью будут перемещаться свободные электроны относительно магнитного поля и, следовательно, на них будет действовать сила Лоренца. Под действием силы Лоренца произойдет перераспределение зарядов в проводнике, а значит между его концами появится разность потенциалов – ЭДС индукции, а в контуре индукционный ток.

$$\varepsilon = \oint\limits_l \mathbf{E}_{cm} dl$$

Здесь сторонней силой является сила Лоренца.

$$\mathrm{F_л} = \mathrm{q}[\mathbf{vB}] \qquad \mathbf{E_{ст}} = \frac{\mathbf{F}}{\mathrm{q}} = [\mathbf{vB}]$$

$$\varepsilon = \oint\limits_l [\mathbf{vB}] dl = \underbrace{vl}_{\Delta S} B = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

изменение магнитного потока.

$\Delta\mathrm{S}$ - площадь, описанная проводником в единицу времени или изменение площади, ограниченной контуром.

Вывод основного закона электромагнитной индукции из закона сохранения энергии.

По закону сохранения энергии:

$$\varepsilon \mathrm{Idt} = \mathrm{I^2Rdt} + \mathrm{I} \cdot \mathrm{d\Phi}$$

где $\varepsilon I dt$ - энергия источника, отданная во внешнюю цепь за время dt, I^2Rdt - Джоулево тепло, $Id\Phi$ -работа по перемещению куска провода

$$\varepsilon dt = IRdt + d\Phi$$

$$I = \frac{\varepsilon dt - d\Phi}{Rdt}$$

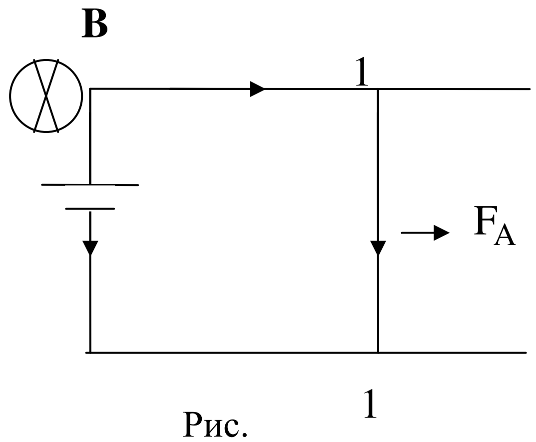


Рис.

$$I = \frac{\varepsilon - \frac{d\Phi}{dt}}{R}$$

Здесь $\varepsilon_{инд} = -\frac{d\Phi}{dt}$

Вращение рамки в магнитном поле.

Явление электромагнитной индукции используется для превращения механической энергии в электрическую. Устройства, которые используются для этого называются генераторами.

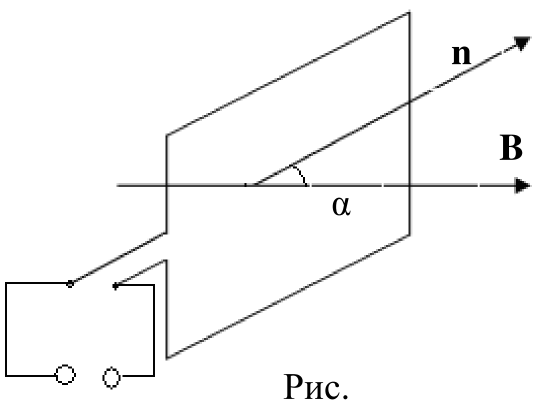


Рис.

Рассмотрим вращение рамки в постоянном магнитном поле (B=const) с угловой скоростью (ω=const). Пусть в начальный момент времени вектора **n** и **B** параллельны**.** Магнитный поток через площадь S, ограниченную рамкой

$$\Phi_0 = BS$$

При вращении рамки магнитный поток через площадь рамки будет изменяться следующим образом:

$$\Phi = B_n S = BS\cos\alpha = BS\cos\omega t$$

ЭДС индукции:

$$\varepsilon_i = \frac{d\Phi}{dt} = \omega\Phi_0 \sin\omega t = BS\omega \sin\omega t$$

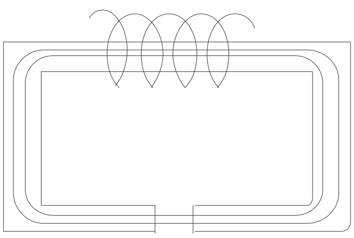
Максимальная ЭДС индукции

$$\varepsilon_{i\max} = BS\omega$$

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{i\ \max} \sin\omega t$$

Магнитные цепи. Законы магнитной цепи.

Совокупность областей, по которым проходит поток магнитной индукции называют магнитной цепью. Если поток переходит из среды в среду целиком, то говорят о последовательном соединении потоков магнитной индукции одной и другой среды; если поток разветвляется на отдельные части, которые затем опять сливаются, то говорят о параллельном соединении частей потока. Рассмотрим простую неразветвленную магнитную цепь. Будем считать, что она составлена из двух частей: ярма с сечением S из материала с магнитной проницаемостью μ и зазора с тем же сечением и магнитной проницаемостью μ_1. Соответствующая электрическая цепь выглядит следующим образом (Рис.):



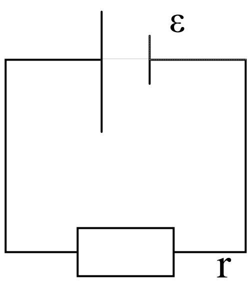


Рис.

Для магнитной цепи имеем:

$$H\ell + H_1\ell_1 = NI \quad (1)$$

где: H – напряженность магнитного поля внутри ярма,

ℓ - длина ярма, измеренная вдоль средней линии индукции магнитного поля,

H_1 - напряженность магнитного поля внутри зазора,

ℓ_1 - длина зазора,

N – число витков в обмотке,

I – сила тока в обмотке,

Учтем, что $\Phi = BS;\ B = \mu\mu_0 H$, имеем:

$$H = \frac{\Phi}{\mu\mu_0 S}; \qquad H_1 = \frac{\Phi}{\mu\mu_1 S}$$

Подставим в (1) и выразим магнитный поток:

$$\Phi = \frac{NI}{\dfrac{l}{\mu\mu_0 S} + \dfrac{l_1}{\mu_1\mu_0 S}}$$

Эта формула подобна закону Ома для соответствующей электрической цепи.

Здесь:

$$\varepsilon_m = NI \text{ - магнитодвижущая сила}$$

$R_m = \dfrac{l}{\mu\mu_0 S} + \dfrac{l_1}{\mu_1\mu_0 S}$ - полное магнитное сопротивление цепи

$r_m = \dfrac{l}{\mu\mu_0 S}$; $\quad r_{m_1} = \dfrac{l_1}{\mu_1\mu_0 S}$ - магнитные сопротивления соответствующих участков цепи

$$R_m = r_m + r_{m_1}$$

При последовательном соединения магнитопроводов их магнитные сопротивления складываются.

На практике приходится встречаться с цепями, где происходит разветвление магнитного потока (рис).

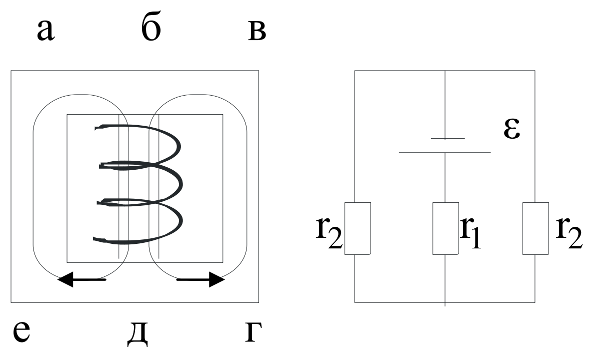


рис.

Обозначим длину бд- ℓ_1; сечение – S_1; напряженность магнитного поля в этом сечении H_1.

Для участка деаб - ℓ_2, S_2 и H_2.

Вырази H_1 и H_2 через магнитные потоки:

$$H_1 = \frac{\Phi_1}{\mu_1 \mu_0 S_1} \qquad H_2 = \frac{\Phi_2}{\mu_2 \mu_0 S_2}$$

Следовательно:

$$\Phi_1 \frac{\ell_1}{\mu_1 \mu_0 S_1} + \Phi_2 \frac{\ell_2}{\mu_2 \mu_0 S_2} = N_1 I_1$$

$$\frac{\ell_1}{\mu_1 \mu_0 S_1} = r_{m_1} \qquad\qquad \frac{\ell_2}{\mu_2 \mu_0 S_2} = r_{m_2}$$

$$N_1 \cdot I_1 = \varepsilon_{m_1}$$

Отсюда имеем:

$$\Phi_1 r_{m_1} + \Phi_2 r_{m_2} = \varepsilon_{m_1}$$

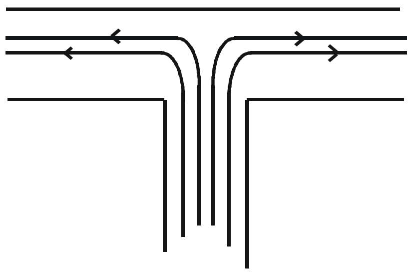
В выделенный замкнутый контур могут входить сколько угодно участков с различными магнитными потоками и на каждом из них может быть своя намагничивающая обмотка. Поэтому, в общем случае:

$$\sum_k \Phi_k r_{m_k} = \sum_k \varepsilon_{m_k}$$

второе правило Кирхгофа.

При пользовании этим правилом необходимо учитывать правило знаков: ε_{m_k} считается положительной, если соответствующая обмотка создает поток, направление которого совпадает с выбранным направлением обхода контура. Положительное значение обхода Ф - направление потока совпадает с выбранным направлением потока.

Первое правило Кирхгофа: сумма всех магнитных потоков потоков, направленных к месту разветвления, равняется сумме всех магнитных потоков, уходящих от него.

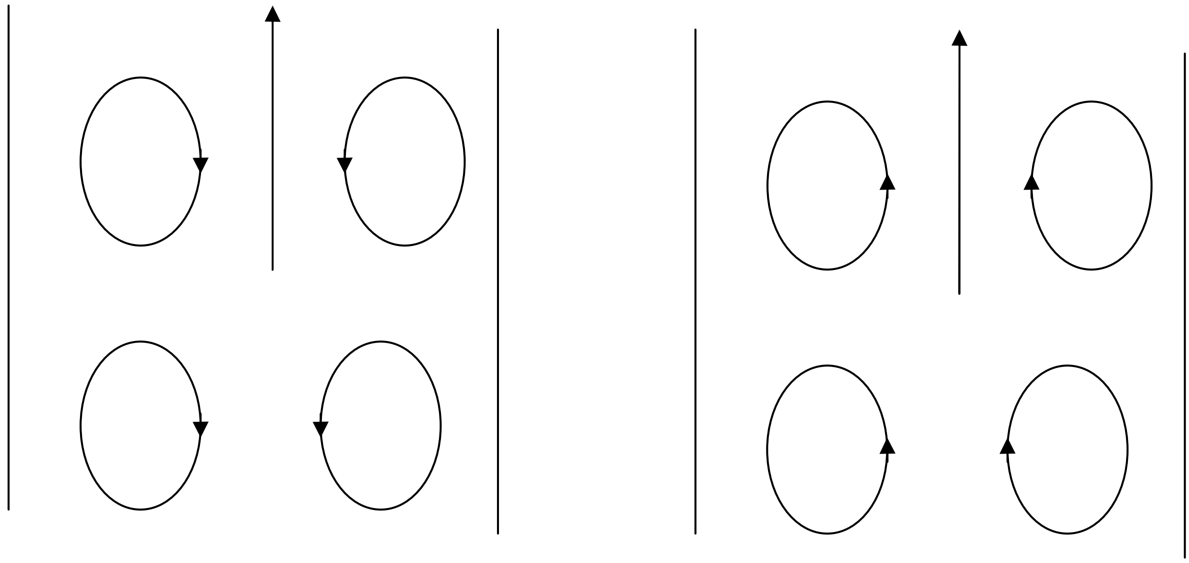


$$\sum_{\text{к}} \Phi_{\text{к}} = 0$$

Рис.

Токи Фуко.

Индукционные токи могут возбуждаться и в сплошных массивных проводниках, помещенных в переменное магнитное поле. В этом случае их называют токами Фуко или вихревыми токами. Электрическое сопротивление массивного проводника мало, поэтому токи Фуко могут достигать очень большой силы. В соответствии с правилом ленца токи Фуко выбирают внутри проводника такие пути и направления, чтобы своим действием сильнее противиться причине, их вызывающей. Поэтому, движущееся в магнитном поле массивные проводники испытывают сильное торможение. Это обстоятельство используется для демпфирования (успокоения) подвижных частей гальванометров, сейсмографов и других приборов. Вихревые токи вызывают также нагревание проводников до очень высоких температур, вплоть до плавления металла, что используется в индукционных печах.



$\frac{dI}{dt} > 0$ $\frac{dI}{dt} < 0$

Рис.

Во многих случаях токи Фуко являются нежелательными, приходится принимать специальные меры борьбы с ними. Чтобы предотвратить потери энергии токами Фуко сердечников трансформаторов, эти сердечники набирают из тонких пластин, разделенных изолирующими прослойками для увеличения сопротивления сердечников, а значит уменьшения потоков Фуко. Аналогично устанавливаются якори генераторов и электродвикателей.

Токи Фуко возникают в проводниках, по которым текут переменные токи, и направлены таким образом, что ослабляют ток внутри провода и усиливают на поверхности. В результате ток высокой частоты оказывается вытесненным на поверхность проводника. Явление вытеснения тока высокой частоты на поверхность проводника называется скин-эффектом или поверхностным эффектом.

Самоиндукция. Индуктивность.

Индукционный ток в замкнутом контуре возникает не только, когда он пересекается внешним меняющимся во времени магнитным потоком, но и тогда, когда сам проводник с током является источником переменного магнитного поля – потока. Это имеет место при переменном токе. Поскольку магнитная индукция пропорциональна величине тока (B~I), а ток является переменным, то магнитный поток (Ф=BS) при переменном токе тоже будет переменной величиной.

Явление возникновения индукционного тока в замкнутом контуре под влиянием собственного переменного магнитного поля называется самоиндукцией.

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}; \quad \Phi \sim B \sim I \quad \Phi = LI$$

$$d\Phi = LdI$$

$$\varepsilon = -L\frac{dI}{dt}$$ - ЭДС самоиндукции.

ЭДС самоиндукции пропорциональна скорости изменения тока в единицу времени в самом контуре. L – коэффициент пропорциональности, называемый индуктивностью контура. Зависит от формы, размеров контура, от магнитных свойств среды, в которой находится сам контур.

$$[L] = Гн = \frac{Вб}{А}$$

Индуктивность соленоида.

Считаем длину соленоида много больше его диаметра, т.е. будем пренебрегать искажением поля на его концах. Магнитный поток через соленоид можно найти по формуле

$$\Phi = n_0 B \cdot S \cdot \ell,$$

где n_0 - число витков на единицу длины соленоида, S – площадь одного витка, $B \cdot S$ - поток через один виток

$$B = \mu_0 I \cdot n_0 \qquad \Phi = \mu_0 n_0^2 \cdot I \cdot \ell \cdot S \quad (\Phi = \mu\mu_0 \frac{N^2}{\ell} SI)$$

Т.к. магнитный поток пропорционален току, то

$$L = \mu_0 \mu n_0^2 \ell \cdot S = \mu_0 \mu n^2 V,$$

где $V = \ell \cdot S$ - объём соленоида.

Ток при замыкании и размыкании цепи.

Токи, возникающие вследствие самоиндукции, всегда направлены так, чтобы противодействовать изменениям тока в цепи. Это приводит к тому, что установление тока при размыкании и замыкании происходит не мгновенно, а постепенно. Найдем характер изменения тока при размыкании цепи.

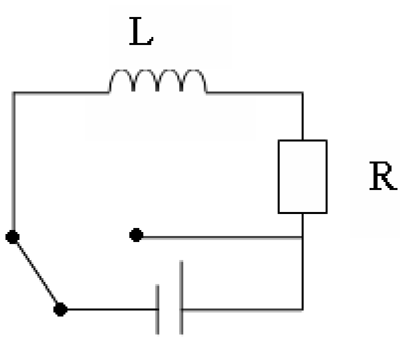


Рис.

$$I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$$

При t=0 отключим источник тока. При убывании силы тока в цепи, возникнет ЭДС самоиндукции, препятствующая этому убыванию.

$$I \cdot R = \varepsilon_s = -L\frac{dI}{dt}$$

Или $\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = 0$ - линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\int \frac{dI}{I} = -\int \frac{R}{L} dt$$

$$\ln I = -\frac{R}{L} t + const$$

$$I = const \exp\left(-\frac{R}{L} t\right)$$

Const найдем из начальных условий: при t=0 $(I = I_0)$. Следовательно:

$$I = I_0 \exp(-\frac{t}{\tau})$$

При замыкании цепи, пока сила тока не достигнет установившегося значения, в цепи кроме ε будет действовать ЭДС самоиндукции

$$I \cdot R = \varepsilon + \varepsilon_s = \varepsilon - L\frac{dI}{dt}$$

Или:

$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{\varepsilon}{L}$ - линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами.

Общее решение:

$$I = I_0 + const \exp(-\frac{R}{L}t)$$

Учитывая, что при t=0 I=0, следовательно $const = I_0$. Тогда:

$$I = I_0[1 - \exp(-\frac{R}{L}t)]$$

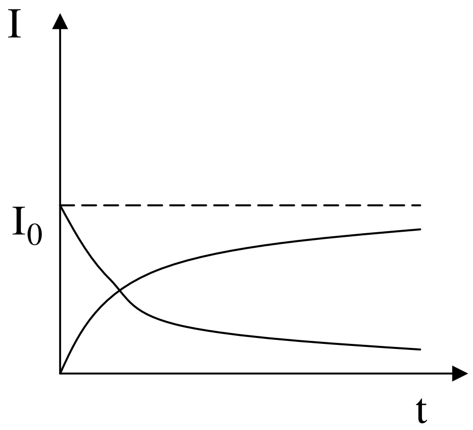


Рис.

Взаимная индукция.

Если имеем два близко расположенных контура с переменными токами, то каждый из этих контуров находится в переменном магнитном поле другого контура. Под действием переменного магнитного потока одного контура в другом контуре возникает ЭДС индукции и наоборот (Рис.).

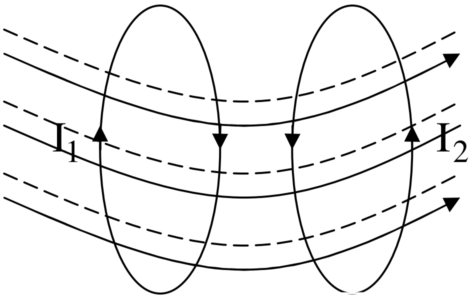


Рис.

$$\varepsilon_1 = -L_{12}\frac{dI_2}{dt}$$

$$\varepsilon_2 = -L_{21}\frac{dI_1}{dt}$$

ε_1 - ЭДС индукции, возникающая в первом контуре под действием переменного магнитного потока 2-го контура;

ε_2- ЭДС индукции, возникающая в втором контуре под действием переменного магнитного потока 1-го контура

$L_{12} = L_{21}$ - коэффициент взаимной индукции.

Коэффициенты взаимной индукции зависят от формы, размеров, взаимного расположения контуров и магнитных свойств среды.

Численно коэффициент взаимной индукции равен ЭДС индукции, возникающей в одном контуре при изменении тока в другом контуре на 1А за 1 сек. Если имеются две катушки с числом витков N_1 и N_2 соответственно, то

$$L_{12} = \frac{S}{\ell}\mu\mu_0 N_1 N_2$$

$$L_{21} = \frac{S}{\ell}\mu\mu_0 N_1 N_2$$

Трансформаторы.

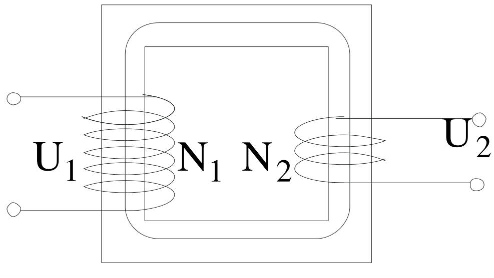


Рис.

Трансформатор представляет собой устройство, предназначенное для преобразования напряжения и силы переменного тока. КПД трансформаторов доходит до 99%. Будем предполагать, что магнитный поток сосредоточен внутри сердечника и пронизывает обе обмотки. ЭДС самоиндукции, возникающая в первой обмотке:

$$\varepsilon_1 = -\frac{d\Phi}{dt} N_1,$$

во второй обмотке

$$\varepsilon_2 = -\frac{d\Phi}{dt} N_2$$

По закону Ома:

$$U_1 = I_1 R_1 - \varepsilon_1 = I_1 R_1 + \frac{d\Phi}{dt} N_1$$

$$U_2 = I_2 R_2 - \varepsilon_2 = I_2 R_2 + \frac{d\Phi}{dt} N_2$$

где R_1 и R_2 - сопротивления первичной и вторичной обмотки, I_1 *и* I_2 - силы тока в них. Рассмотрим случай разомкнутой вторичной обмотки (I_2=0) и $I_1 R_1 << \varepsilon_1$. Тогда

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} = k$$

коэффициент трансформации.

Если коэффициенты трансформировании k>1, то трансформатор повышающий, если k<1, то трансформатор понижающий.

Энергия магнитного поля тока.

Пусть в контуре ток изменяется со скоростью $\frac{dI}{dt}$. При этом в нем возникает ЭДС самоиндукции, которая равна $\varepsilon = -L\frac{dI}{dt}$. На преодоление $\varepsilon_{инд}$ при нарастании тока в контуре, источник тока затрачивает определенную энергию. Эта работа по преодолению $\varepsilon_{инд}$ по закону сохранения энергии совершается за счет энергии магнитного поля тока.

$$dW = I \cdot \varepsilon_{инд} dt = IL\frac{dI}{dt} = I \cdot LdI$$
$$W = \int_0^I I \cdot LdI = \frac{LI^2}{2}$$

Энергию магнитного поля можно представить следующим образом:

$$W = \int_0 \omega dV,$$

где ω – объёмная плотность энергии, dV – элемент объёма магнитного поля. Объемную плотность энергии можно выразить как:

$$\omega = \frac{B^2}{2\mu_0\mu} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}$$

Энергия магнитного поля, созданного двумя контурами с током:

$$W = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 \pm L_{12} I_1 I_2$$

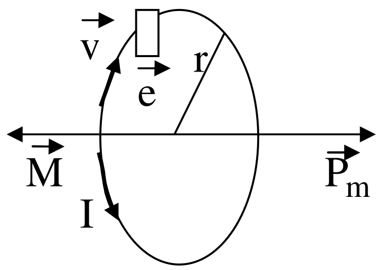
$L_{12}I_1I_2$ - взаимная магнитная энергия двух токов. Выбор знака (+) или (-) зависит то направления тока в катушках.

Магнитные свойства вещества.

Все вещества в магнитном поле намагничиваются, т.е. сами становятся источником магнитного поля. Такие вещества называются магнетиками. Источником магнитного поля являются движущиеся заряды и токи. Следовательно причина намагничивания заключается в том, что во всех веществах существуют мельчайшие электрические токи, замыкающиеся в пределах каждого атома (так называемые молекулярные токи или микротоки по гипотезе Ампера).

Электронная теория магнетизма.

Пусть электрон движется со скоростью v по орбите радиуса r. Через площадку расположенную в любом месте на пути электрона переносится заряд в единицу времени $e\nu$ (ν - число оборотов в секунду), следовательно создается круговой ток $I = e\nu$. Направление движения электрона и направление тока – противоположны. Магнитный момент тока, создаваемого электроном:



$$P_m = I \cdot S = e\nu\pi r^2$$

Учитывая, что $v = 2\pi r\nu$, имеем

$$P_m = \frac{evr}{2}$$

орбитальный магнитный момент. Движущийся по орбите электрон обладает орбитальным механическим моментом

$$L = mv \cdot r$$

Вектора $\mathbf{P_m}$ и **L** направлены противоположно друг другу.

Отношение $\frac{P_m}{L}$ - называется магнитомеханическим или гиромагнитным отношением. Для электрона

$$\frac{P_н}{L} = -\frac{\ell}{2m}$$

Знак «-» показывает, что направления моментов противоположны, кроме орбитальных моментов электрон обладает собственным магнитным $\mathbf{P_{ms}}$ и собственным механическим $\mathbf{L_s}$. Магнитомеханическое соотношение в этом случае

$$\frac{P_{ms}}{L_s} = -\frac{e}{m}$$

Магнитный момент электрона

$$\mathbf{P}_{эл} = \mathbf{P_m} + \mathbf{P_{ms}}$$

Магнитный момент атома

$$\mathbf{P}_{ат} = \sum_{i=1}^{z} P_{m_i} + \sum_{i=1}^{z} P_{ms_i}$$

По магнитным свойствам все вещества делятся на диамагнетики, парамагнетики, ферромагнетики.

Диамагнетизм и парамагнетизм.

Диамагнетики – это вещества, магнитные моменты атомов (молекул) которых в отсутствие внешнего магнитного поля равны нулю. Такими свойствами обладают вещества, в атомах которых имеются только целиком заполненные электронные слои (инертные газы, водород, азот, NaCl и т.д.). Во внешнем магнитном поле возникает прецессия электронной орбиты, т.е. вектор $\mathbf{P_m}$ вращается вокруг вектора **B** под углом α.

Частота вращения $\omega_L = \dfrac{eB}{2m}$ - ларморова частота. Прецессия эквивалентна круговому току. Этот микроток создает магнитное поле **ΔP.** По правилу Ленца **ΔP** направлено противоположно **B**. Диамагнитный эффект заключается в появлении магнитного поля в появлении магнитного поля **ΔP,** обусловленного прецессией электронной орбиты. Диамагнетизм свойственен всем веществам. Следовательно, у диамагнетиков собственное магнитное поле будет определяться только $\mathbf{\Delta P}$, т.к. для них $\mathbf{P}_{ат} = 0$. Собственное магнитное поле намагниченного диамагнетика всегда направлено против внешнего поля.

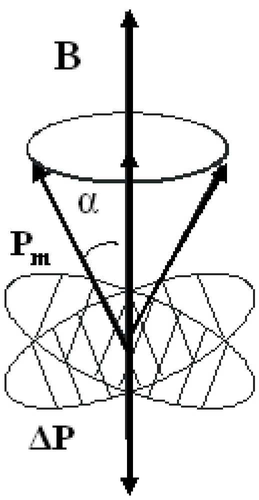


Рис.

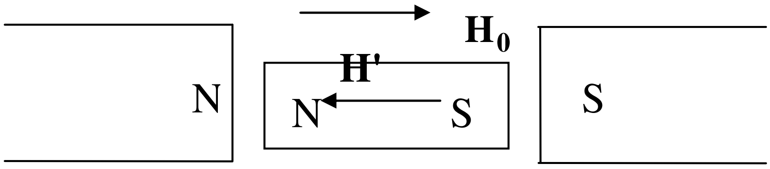


Рис.

Суммарное магнитное поле:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H_0} + \mathbf{H'} \quad H = H_0 - H' \quad B = B_0 - B'$$

Таким образом, диамагнетик ослабляет внешнее поле.

Парамагнетики – вещества, для которых суммарный магнитный момент атома в отсутствие внешнего магнитного поля из-за теплового движения магнитные моменты атомов ориентированы беспорядочно. Магнитный момент тела, равный векторной сумме магнитных моментов атомов, близок к нулю и тело не намагничено. Во внешнем магнитном поле магнитные моменты атомов ориентируются преимущественно по полю, и тело намагничивается. При снятии внешнего поля тепловое движение атомов разориентирует магнитные моменты и происходит размагничивание тела. Чем выше температура парамагнетика, тем слабее его намагниченность во внешнем поле. Магнитный момент атома парамагнетика направлен по внешнему полю (рис.). Суммарное магнитное поле: $\mathbf{B} = \mathbf{B_0} + \mathbf{B'}$ $\quad B = B_0 + B'$.

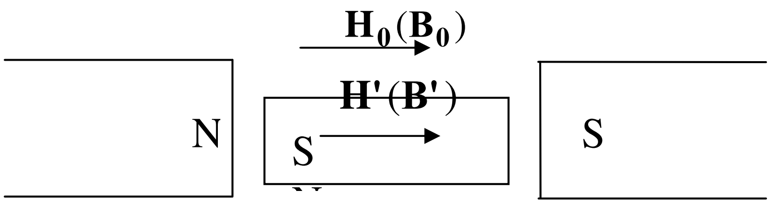


Рис.

Намагниченность или тело намагничивания.

Намагниченностью называется векторная сумма магнитных моментов в единицу объёма.

$$\mathbf{j} = \frac{\sum\limits_i \mathbf{P_{iaa}}}{\Delta V}$$

$$\mathbf{P_{iaa}} = \sum_i \mathbf{P_{ioop}} + \sum_{\mathbf{i}} \mathbf{P_{icсобст}} + \sum_i \Delta\mathbf{P_i}$$

$$\mathbf{j} = \mu_0 \chi \mathbf{H_0}$$

Намагниченность – есть индукция собственного магнитного поля маятников.

$$\mathbf{B} = \mathbf{B_0} + \mathbf{B'} = \mathbf{B_0} + \mathbf{j}$$

$$\mathbf{B_0} = \mu_0 \mathbf{H_0};$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H_0} + \mu_0 \text{æ} \mathbf{H_0} = \mu_0 \mathbf{H_0}(1 + \text{æ}) \quad (1)$$

где æ – магнитная восприимчивость, для диамагнетиков $\chi<0$ и не зависит от температуры. Для парамагнетиков $\text{æ} = \frac{C}{T} > 0$ и уменьшается с увеличением температуры.

Сравнивая (1) $\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}$, сделаем заключение, что $\mu = (1 + \text{æ})$

$$1 + \text{æ} = \mu = \frac{B}{B_0}$$

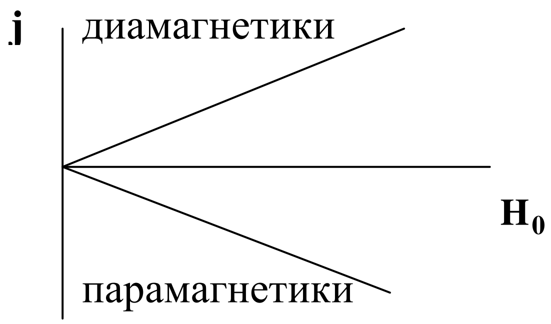


Рис.

Следовательно, относительная магнитная проницаемость показывает, во сколько раз суммарная магнитная индукция в веществе отличается от магнитной индукции в вакууме. Зависимость намагничивания диамагнетиков и парамагнетиков от напряженности внешнего магнитного поля – линейная.

Ферромагнетики – сильномагнитные вещества; их намагничивание в 10^{10} раз сильнее, чем для парамагнетиков и диамагнетиков. Намагниченность ферромагнетиков зависит от напряженности внешнего поля сложным образом

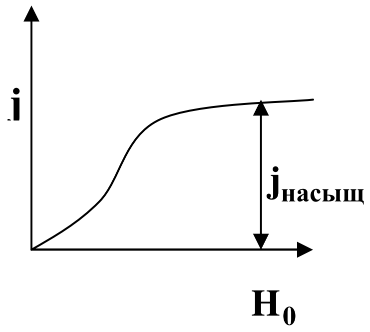


Рис.

(рис.). Кривая намагниченности ферромагнетика во внешнем поле называется кривой Столетова.

Магнитный гистерезис. Петля гистерезиса.

Для исследования намагниченности ферромагнетика во внешнем намагниченном поле поместим его внутрь соленоида (Рис.).

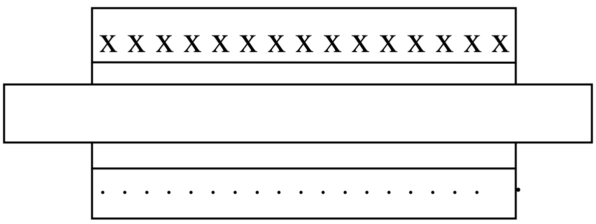


Рис.

Изменяя направление тока в соленоиде, тем самым будем изменять направление внешнего магнитного поля. Изменяя величину тока в соленоиде, мы будем изменять величину внешнего магнитного поля. Увеличиваем H_0 до значения, при котором наступает насыщение намагниченности ферромагнетика (кривая 0-1). Затем уменьшаем напряженность внешнего магнитного поля до нуля. Намагничивание будет уменьшаться не по кривой (0-1), а по кривой (1-2). Когда напряженность внешнего поля станет равной нулю, намагниченность не исчезнет, а станет равной $B_{ост}$ - остаточная индукция. Намагниченность станет равной нулю под действием напряженности H_c - коорцитивная сила. Существование остаточного намагничивания делает возможным

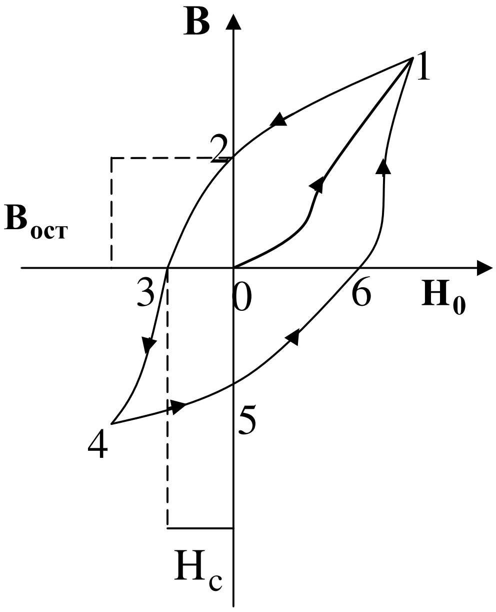


Рис.

изготовление постоянных магнитов. При действии на ферромагнетик переменного внешнего магнитного поля индукция ферромагнетика изменяется в соответствии с кривой 1-2-3-4-5-6-1, которая называется петлей гистерезиса.

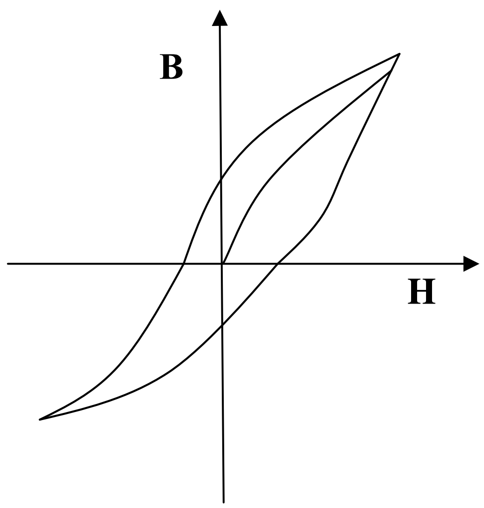
Магнитный гистерезис – явление отставания изменения магнитной индукции ферромагнетика от изменения намагничивающего поля.

Площадь, ограниченная петлей гистерезиса, численно равна работе, затраченной на перемагничивание материала. Эта работа превращается в тепло.

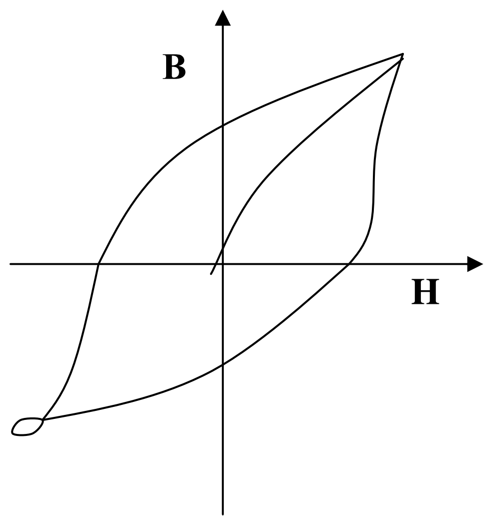
При быстроизменяющихся внешних полях стремятся получить ферромагнетики с малой площадью петли – магнитомягкие материалы. Для постоянных магнитов важна большая остаточная намагниченность – магнитотвердые (магнитожесткие) материалы.

Для каждого ферромагнетика имеется определенная температура T_c, при которой ферромагнетик утрачивает свои свойства. T_c - температура Кюри. При температуре выше точки Кюри, ферромагнетик становится парамагнетиком, магнитная восприимчивость которого подчиняется закону Кюри-Вейсса.

Рис.



Мягкие ферромагнетики



Жесткие ферромагнетики

$$\chi = \frac{C}{T - T_c}$$

Объяснение ферромагнетизма.

Все магнитные свойства объясняются доменной структурой ферромагнетика. Домен – это область небольших размеров, самопроизвольно намагничинная до насыщения. Ферромагнетик можно представить в виде совокупности отдельных доменов, каждый из которых имеет магнитный момент, отличный от нуля (Рис.).

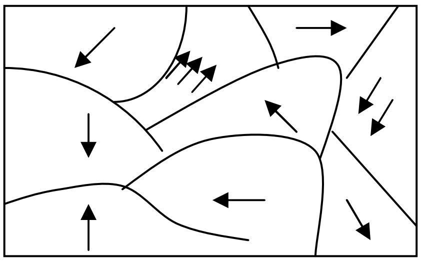


Рис.

Без внешнего магнитного поля магнитные моменты доменов ориентированы беспорядочно и сумма магнитных моментов доменов $\sum \mathbf{P}_{\mathbf{i\ дом}}$ равна нулю. При внесении во внешнее магнитное поле магнитные моменты доменов $\mathbf{P}_{\mathbf{дом}}$ ориентируются по полю. Появление насыщения намагниченности ферромагнетика $j_{насыщения}$ объясняется тем, что все магнитные моменты доменов и выстраиваются по внешнему магнитному полю и намагниченность ферромагнетика не зависит от внешнего магнитного поля. При намагничивании ферромагнетик деформируется, т.е. изменяются его размеры. Это явление получило название магнитострикции.

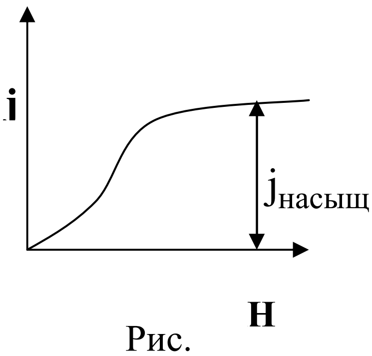


Рис.

Максвелловская трактовка электромагнитной индукции.

Наличие в пространстве изменяющегося магнитного поля приводит к возникновению электрического поля.

Идея Максвелла: между электрическим и магнитным полем существует обратное соотношение: изменяющееся электрическое поле должно приводить к появлению магнитного поля.

Для установления количественных соотношений между меняющимися электрическими и магнитными полями, Максвелл ввел понятие тока смещения. Рассмотрим электрическую цепь (рис.).

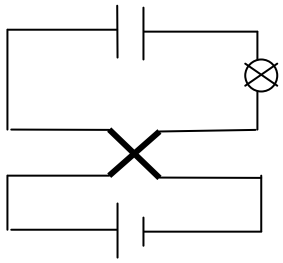


Рис.

В цепи постоянного тока конденсатор является участком с очень большим сопротивлением и ток в цепи отсутствует. Однако, в момент подключения цепи к источнику тока или переключения полярности, лампочка вспыхивает, следовательно, цепь оказывается замкнутой.

При подключении конденсатора к источнику тока или при перемене полярности происходит зарядка или перезарядка конденсатора. Заряд на пластинах изменяется от 0 до Q (или от Q до -Q). В этот момент между обкладками конденсатора появляется переменное электрическое поле, которое и замыкает токи проводимости в проводниках, которые благодаря конденсатору терпят разрыв. Это переменное электрическое поле Максвелл назвал токами смещения. Плотность потока следующая:

$$j_{см} = \frac{\partial \mathbf{Д}}{\partial t}$$

где **Д** - вектор электрического смещения

Ток смещения

$$I_{см} = \frac{\partial \mathbf{Д}}{\partial t} \cdot S$$

где S- площадь поперечного смещения потока вектора **Д**

Если пространство между обкладками конденсатора заполнено диэлектриком, то учитывая, что $\mathbf{Д} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ имеем для плотности тока смещения:

$$j_{см} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

$$I_{см} = (\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}) \cdot S$$

Докажем появление магнитного поля при наличии изменяющегося электрического поля.

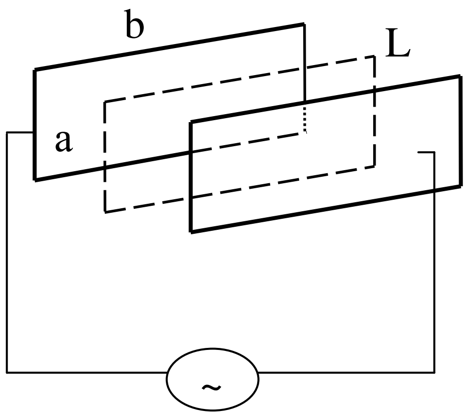


Рис.

$$\oint\limits_L \mathbf{H} d\ell = H(2a + 2b)$$

$$I = \mathbf{j_{см}} \cdot a \cdot b = \frac{\partial Д}{\partial t} \cdot a \cdot b$$

По закону полного тока

$$\oint\limits_L \mathbf{H} d\ell = \frac{\partial Д}{\partial t} \cdot S$$

$$H(2a + 2b) = \frac{\partial Д}{\partial t} \cdot ab$$

$$H = \frac{ab}{2(a+b)} \frac{\partial Д}{\partial t} \neq 0$$

Следовательно: изменяющееся электрическое поле появляется при появлении меняющегося магнитного поля и наоборот.

Основные уравнения теории Максвелла для электромагнитного поля.

С учетом тока смещения закон полного тока запишется в виде:

$$\oint\limits_\ell \mathbf{H} d\ell = \sum I_{пр} + \sum I_{см} = \sum I_{пр} + \sum \frac{\partial Д}{\partial t} \cdot S$$

$$\oint\limits_\ell \mathbf{H} d\ell = \oint\limits_s (j_{пр} + \frac{\partial Д}{\partial t}) dS \qquad (1)$$

Основной закон электромагнитной индукции.

$$\oint\limits_\ell \mathbf{E} d\ell = -\oint\limits_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dS \quad (2)$$

Теорема Остроградского-Гаусса для электростатического поля

$$\oint_S (\mathbf{Д} \cdot \mathbf{n}) dS = \int \rho dv \quad (3)$$

теорема Остроградского-Гаусса для магнитного поля

$$\oint_S (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) dS = 0 \quad (4)$$

Уравнения (1)-(4) представляют собой Максвелла в интегральной форме.

Уравнения Максвелла в дифференцируемой форме:

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{H} = \mathbf{j_{пр}} + \frac{\partial \mathbf{Д}}{\partial t} \quad (5)$$

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (6)$$

$$\mathrm{div}\mathbf{Д} = \rho \quad (7)$$

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0 \quad (8)$$

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{H} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ H_x & H_y & H_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix}$$

где $$\mathrm{div}\mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

При решении уравнений Максвелла используют соотношения:

$\mathbf{Д} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}$; $\mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H}$; $\mathbf{j} = \gamma\mathbf{E}$,

где ε, μ и γ - характеризуют свойства среды; и граничные условия:

$$Д_{п_1} = Д_{п_2}; \quad E_{\tau_1} = E_{\tau_2}; \quad B_{п_1} = B_{п_2}; \quad H_{\tau_1} = H_{\tau_2}$$

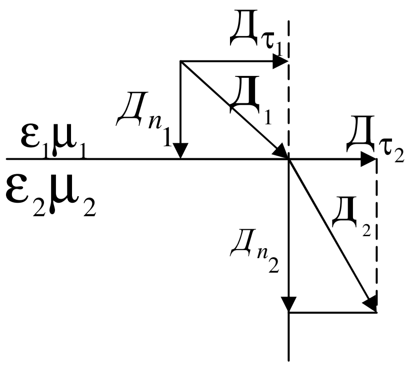


Рис.

Для стационарных электрических и магнитных полей (E=const; B=const):

$$\oint_L \mathbf{E}d\ell = 0$$

$$\oint_s \mathbf{Д}d\mathbf{S} = q$$

$$\oint_L \mathbf{H}d\ell = I$$

$$\oint_s \mathbf{B}d\mathbf{S} = 0$$

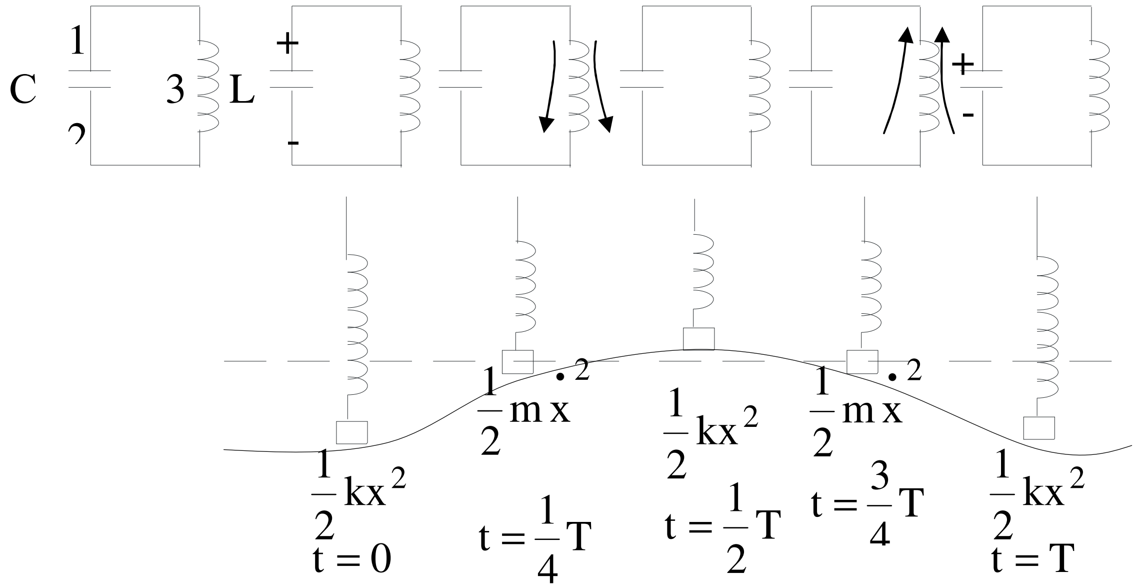
Собственные электрические колебания в контуре без активного сопротивления.

В цепи, содержащей индуктивность и ёмкость, могут возникнуть электрические колебания. Такая цепь называется колебательным контуром.

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{c}q^2 \quad \frac{1}{2}L\dot{q}^2 \quad \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{c}q^2 \quad \frac{1}{2}L\dot{q}^2$$

-

+



Найдем уравнения колебаний в колебательном контуре. Дл этого воспользуемся законом Ома для замкнутого участка цепи.

$$I \cdot R = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}$$

В заданном колебательном контуре отсутствует активное сопротивление

Здесь $$\varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{q}{c}$$

ЭДС в контуре представляет собой ЭДС самоиндукции:

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_s = -L\frac{dI}{dt}$$

Учитывая, что:

$$I = \frac{dq}{dt} = \dot{q}; \quad \frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dq}{dt}\right) = \frac{d^2q}{dt^2} = \ddot{q}$$

Тогда имеем:

$$0 = -\frac{q}{c} - L\ddot{q}$$

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$$

Обозначим $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$

Следовательно, уравнение свободных колебаний в контуре:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

Решение уравнения свободных колебаний в контуре имеет вид:

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \alpha)$$

Период колебаний (формула Томсона)

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

Напряжение на конденсаторе:

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C}\cos(\omega_0 t + \alpha)$$

Ток: $$I = \frac{dq}{dt}$$

$$I = -\omega_0 q_m \sin(\omega_0 t + \alpha) = I_{max}\cos(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2})$$

Сила тока в колебательном контуре опережает по фазе напряжение на конденсаторе на $\frac{\pi}{2}$

$$U_m = \frac{q_m}{C} \qquad I_m = \omega_0 q_m$$

$$U_m = \sqrt{\frac{L}{C}} I_m$$

Свободные затухающие колебания.

Всякий реальный колебательный контур обладает активным сопротивлением. Энергия, занесенная в контуре частично уходит на нагревание соединительных приборов и на электронное излучение. Следовательно, колебания будут затухающими. Воспользуемся законом Ома для неоднородного участка цепи:

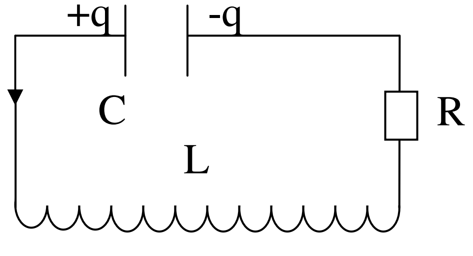


Рис.

$$I \cdot R = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}$$

Здесь:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{q}{c}$$

ЭДС в контуре представляет собой ЭДС самоиндукции:

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_s = -L\frac{dI}{dt} = L\frac{d}{dt}\left(\frac{dq}{dt}\right) = -L\ddot{q}$$

Тогда имеем:

$$\dot{q}R + \frac{q}{c} + L\ddot{q} = 0$$

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$$

Обозначим $\qquad \beta = \frac{R}{2L}; \qquad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

Следовательно, уравнение свободных колебаний в контуре:

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad (1)$$

Если $\beta^2 << \omega_0^2$ (условие слабого затухания), то решение уравнения (1) имеет вид:

$$q = q_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \alpha)$$

где $\qquad \omega = \sqrt{(\omega_0^2 - \beta^2)}; \qquad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}};$

Найдем напряжение на конденсаторе:

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C}e^{-\beta t}\cos(\omega t + \alpha) = U_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \alpha)$$

Ток в цепи контура: $\qquad I = \frac{dq}{dt} = \omega_0^2 q_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \alpha + \psi)$

Затухание характеризуется логарифмическим декрементом затухания:

$$\lambda = \ln\frac{a(t)}{a(t+T)} = \beta T$$

Логарифмический декремент затухания обратен числу колебаний, совершаемых за время, в течение которого амплитуда уменьшается в е раз.

$$\lambda = \frac{1}{Ne}$$

$$\lambda = \beta T = \frac{R}{2L} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi R}{L\omega}$$

Для характеристики затухания колебательных контуров пользуются величиной, которая называется добротностью:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi \cdot Ne.$$

В случае слабого затухания $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.$

Вынужденные электрические колебания.

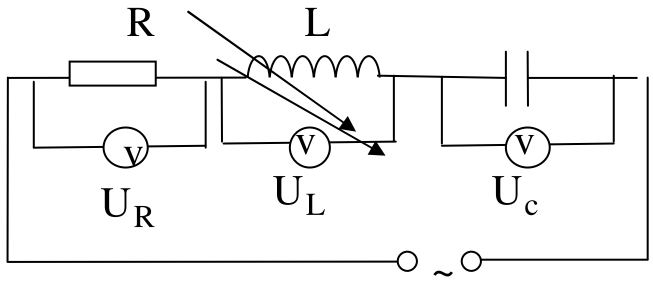


Рис.

Чтобы вызвать вынужденные колебания в колебательном контуре, необходимо на систему оказывать внешнее периодическое воздействие.

Пусть в цепи контура действует переменное напряжение U, изменяющееся по закону:

$$U = U_m \cos \omega t$$

В этом случае уравнение вынужденных колебаний в контуре будет иметь вид:

$$(2) \qquad IR = -\frac{q}{C} - L\frac{dI}{dt} + U_m \cos(\omega_0 t + \alpha)$$

С учетом обозначений $2\beta = \frac{R}{L}$ и $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ имеем:

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = U_m \cos\omega t$$

Из (2)

$$IR = U_R; \qquad \frac{q}{C} = U_C; \qquad L\frac{dI}{dt} = U_L;$$

Следовательно:

$$U_R + U_C + U_L = U_m \cos\omega t$$

Сумма напряжений на отдельных участках контура в каждый момент времени равна приложенному извне напряжению. Частное решение неоднородного дифференциального уравнения:

$$q = q_m \cos(\omega t + \varphi),$$

где

$$q_m = \frac{\frac{U_m}{L}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\beta^2\omega^2}}$$

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Учитывая, что $\beta = \frac{R}{2L}$ и $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

имеем:

$$q_m = \frac{U_m}{\omega\sqrt{R^2 + [\omega L - 1/(\omega C)]^2}}$$

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{R}{\frac{1}{\omega C} - \omega L}$$

Резонансная частота для напряжения на конденсаторе:

$$\omega_{U\ \text{рез}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}$$

Резонансная частота для силы тока:

$$\omega_{I\ \text{рез}} = \frac{1}{LC}$$

Сила тока в цепи изменяется по закону

$$I = I_m \cos(\omega t + \varphi),$$

где $$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + [\omega L - 1/(\omega C)]^2}}$$

Где $Z = \sqrt{R^2 + [\omega L - 1/(\omega C)]^2}$ - полное электрическое сопротивление контура или импеданс

$X_L = \omega L$ - индуктивное сопротивление

$X_C = \frac{1}{\omega C}$ - емкостное сопротивление

$$Z = \sqrt{R^2 + [X_L + X_C]^2}$$

Где R – активное сопротивление контура

$X_i = \omega L$ - индуктивное сопротивление контура

$X_C = \frac{1}{\omega C}$ - емкостное сопротивление контура.